

Invariante Mannigfaltigkeiten für Produkte zufälliger Diffeomorphismen

Stephan Dahlke

Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades der Naturwissenschaften
der Universität Bremen

Bremen 1989



Digitized by the Internet Archive
in 2026

Invariante Mannigfaltigkeiten für Produkte zufälliger Diffeomorphismen

Stephan Dahlke

Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades der Naturwissenschaften
der Universität Bremen

Bremen 1989

Die Dissertation lag dem Promotionsausschuß des Fachbereichs Mathematik/Informatik der Universität Bremen vor. An dem Promotionsverfahren haben Prof. Dr. H. F. Münzner und Prof. Dr. L. Arnold als Gutachter mitgewirkt. Das Kolloquium fand am 7. Juli 1989 statt.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	2
1 Produkte zufälliger Diffeomorphismen	6
2 Lokale invariante Mannigfaltigkeiten	9
2.1 Stabile Mannigfaltigkeiten	9
2.2 Instabile- und Oseledec-Mannigfaltigkeiten	33
2.3 Beweis der Lemmata 2.1.2 und 2.1.3	41
3 Das Globalisierungsproblem	57
3.1 Graphentransformation (in Banachräumen von Schnitten)	59
3.2 Ein zentrales Theorem	66
3.3 Beweis der Lemmata 3.2.2 - 3.2.6	82
Appendix	100
Literatur	105

Einleitung

Ein wichtiger Aspekt der qualitativen Beschreibung eines dynamischen Systems ist die Untersuchung der invarianten Mengen des Systems. Dieser Philosophie entsprechend ist es das Ziel der vorliegenden Arbeit, invariante Mannigfaltigkeiten für spezielle dynamische Systeme, nämlich für Produkte zufälliger Diffeomorphismen auf kompakten Riemannschen Mannigfaltigkeiten zu finden und soweit als möglich Aussagen über deren Eigenschaften zu machen¹. Die hierzu benutzte Vorgehensweise wurde wesentlich von Ergebnissen beeinflusst, die auf Pesin [16, 17, 18] zurückgehen. In [16] wird die Existenz stabiler Mannigfaltigkeiten für Diffeomorphismen auf kompakten Mannigfaltigkeiten gezeigt. Zentrales Hilfsmittel hierbei ist der multiplikative Ergodensatz von Oseledec [15]. Dieser besagt, daß in bezug auf ein invariantes Maß fast alle Punkte regulär sind, d.h. daß das linearisierte System in ihnen in beiden Zeitrichtungen ein wohldefiniertes asymptotisches Verhalten zeigt, und sichert die Existenz gewisser invarianter meßbarer Unterbündel, die aus den sogenannten Oseledec-Räumen bzw. Fahnen bestehen. Pesin gewinnt nun die stabilen Mannigfaltigkeiten durch "herunterziehen" der Oseledec-Räume zu Parameterwerten $\mu < 0$ auf die zugrundeliegende Mannigfaltigkeit. Die so konstruierten invarianten Mannigfaltigkeiten können daher als nichtlineare Analoga gewisser Oseledec-Räume interpretiert werden.

Der multiplikative Ergodensatz bleibt allerdings auch für viel allgemeinere Systeme gültig. (Siehe hierzu z.B. Carverhill [5, Theorem 2.1] und Boxler [2, Kap. II].) Daher erscheint es plausibel, daß weitreichende Verallgemeinerungen der Pesinschen Arbeiten möglich sein müßten. Insbesondere kann man ganz allgemein die Frage der Existenz nichtlinearer Analoga zu relativ beliebigen Oseledec-Räumen bzw. Fahnen untersuchen. Dies geschieht nun in der vorliegenden Arbeit. Hierbei werden die Pesinschen Ergebnisse in folgender Hinsicht verallgemeinert:

1. Statt eines einzelnen Diffeomorphismus und der hiervon erzeugten Kaskade betrachten wir Produkte zufälliger Diffeomorphismen
2. Es wird die Existenz lokaler (verallgemeinerter) stabiler und instabiler Mannigfaltigkeiten für einen beliebigen Einschnitt im Spektrum (d.h. nicht notwendig auf der negativen bzw. positiven Seite) gezeigt
3. Es wird die Existenz lokaler invarianter Mannigfaltigkeiten tangential an die einzelnen Oseledec-Räume (Oseledec-Mannigfaltigkeiten) gezeigt
4. Es wird untersucht, ob und in welchem Sinne sich lokale verallgemeinerte stabile und instabile Mannigfaltigkeiten globalisieren lassen, d.h. es wird die Frage diskutiert,

¹Streng genommen müßte man hier eigentlich den Begriff "invariante Familien von Untermannigfaltigkeiten" verwenden. Wir werden in Zukunft der Einfachheit halber aber gelegentlich solche Familien selber wieder als invariante Mannigfaltigkeiten bezeichnen

welche Beziehungen zwischen den lokalen invarianten Mannigfaltigkeiten zu Punkten verschiedener Orbits bestehen.

Der multiplikative Ergodensatz wird in der vorliegenden Arbeit dazu benutzt, eine geeignete Zerlegung der Tangentialräume zu gewinnen. Es ist möglich, ähnliche Ergebnisse auch für Systeme zu erhalten, die eine andere Spektralzerlegung besitzen. Insbesondere könnte man mit derselben Methode Systeme untersuchen, für die die dynamische Spektraltheorie von Sacker und Sell [20] anwendbar ist. Vom Technischen her gesehen wäre dies sogar einfacher, da das dynamische Spektrum leichter zu handhaben ist als das meßbare. Man benötigt aber zur Anwendung der dynamischen Spektraltheorie starke Voraussetzungen. In unserem Fall müßte man zum Beispiel Kompaktheit des zugrundeliegenden Wahrscheinlichkeitsraumes fordern. Diese einschneidenden Voraussetzungen sind im Falle des meßbaren Spektrums nach Oseledec nicht nötig, so daß der multiplikative Ergodensatz für unsere Zwecke am ehesten angemessen erscheint.

Die vorliegende Untersuchung steht von der Problemstellung her in enger Beziehung zu den Arbeiten von Carverhill [5] und Boxler [2], in denen, wenngleich mit anderen Methoden, ähnliche Fragestellungen untersucht werden. Carverhill zeigt in seiner Arbeit die Existenz streng stabiler Mannigfaltigkeiten für stochastische Systeme. Sein Vorgehen besteht im wesentlichen darin, die entsprechenden Ergebnisse von Ruelle [19] für deterministische Systeme auf die stochastische Situation zu übertragen. In der Arbeit von Boxler wird der Fall stochastischer Zentrumsmannigfaltigkeiten untersucht. Hierbei wird das center-manifold-theorem von Marsden und McCracken [14] auf den Fall stochastischer Kozykel verallgemeinert. Wir werden später zeigen, daß sich zeitdiskrete Versionen wichtiger Teile dieser Arbeiten mittels des hier präsentierten sehr allgemeinen Ansatzes zurückgewinnen lassen.

Der Aufbau der Arbeit sieht im Einzelnen wie folgt aus:

In Kapitel 1 wird eine Beschreibung der stochastischen Ausgangssituation gegeben sowie eine für unsere Zwecke geeignete Version des Satzes von Oseledec angeführt.

Kapitel 2 beinhaltet die Theorie lokaler invarianter Mannigfaltigkeiten. In Abschnitt 2.1 wird die Existenz lokaler stabiler Mannigfaltigkeiten nachgewiesen. Die prinzipielle Idee besteht im wesentlichen darin, das Problem des Findens einer invarianten Familie von Untermannigfaltigkeiten auf die Frage nach der Existenz gewisser, im eigentlichen Sinne invarianter Mannigfaltigkeiten für Diffeomorphismen eines Banachraumes mit Fixpunkten zu reduzieren. Dazu wird zunächst (lokal) die Dynamik mittels der Exponentialabbildung auf das Tangentialbündel geliftet. Durch Zusammenfassen dieser gelifteten Abbildungen wird dann eine Abbildung in einen Banachraum von Schnitten eines geeigneten meßbaren Bündels konstruiert. Man kann dann zeigen, daß diese Abbildung in gewisser Weise durch die Tangentialabbildung des Systems approximiert wird. Durch geeignet gewählte meßbare Normen wird sodann der Nullschnitt unseres Bündels künstlich zu einem "hyperbolischen" Fixpunkt gemacht und wir können Existenzsätze über invariante Mannig-

faltigkeiten für Abbildungen mit solchen Fixpunkten und in Lipschitz-Nähe zu einem Isomorphismus anwenden. Der damit gefundenen invarianten Mannigfaltigkeit entspricht dann eine invariante Familie von Untermannigfaltigkeiten für das ursprüngliche System. (Derartige Methoden wurden ursprünglich von Hirsch und Pugh [11] entwickelt, um invariante Mannigfaltigkeiten auf hyperbolischen Mengen zu finden. Fathi, Herman und Yoccoz [9] haben gezeigt, daß sich ähnliche Konzepte auch auf den Fall der von Pesin untersuchten ungleichmäßig- partiell hyperbolischen Systeme anwenden lassen. Tatsächlich werden auch, wie ein genaueres Studium zeigt, in den ursprünglichen Pesinschen Arbeiten letztlich sehr ähnliche Konstruktionen durchgeführt, auch wenn dies zunächst nicht so deutlich wird.)

Weiterhin wird in Abschnitt 2.1 gezeigt, daß sich mittels obiger Methodik ein ursprünglich ganz anders erzielt Resultat von Carverhill zurückgewinnen läßt und daß die konstruierten invarianten Mannigfaltigkeiten zu der Oseledec-Fahnen analoge Eigenschaften besitzen, d.h. aufsteigende Filtrationen bilden und in gewissem Sinne meßbar sind.

In Abschnitt 2.2 wird sodann der Fall der instabilen und der Oseledec-Mannigfaltigkeiten untersucht. Die Beweisidee ist hierbei dieselbe wie in Abschnitt 2.1; es werden lediglich andere Existenzsätze über invariante Mannigfaltigkeiten angewendet.

Der Abschnitt 2.3 enthält schließlich die Beweise zweier technischer Lemmata.

In Kapitel 3 wird das Globalisierungsproblem behandelt, d.h. die Frage untersucht, ob sich die in Kapitel 2 konstruierten lokalen invarianten Mannigfaltigkeiten zu Integralmannigfaltigkeiten der aus den Oseledec-Räumen bzw. Fahnen bestehenden Distributionen vereinigen lassen. Carverhill [5] zeigt, daß dies für streng stabile Mannigfaltigkeiten möglich ist. Für Parameterwerte $\mu > 0$ läßt sich eine solche Konstruktion nun im allgemeinen nicht mehr durchführen, da dann die stabilen Mannigfaltigkeiten keine dynamische Charakterisierung mehr besitzen und daher nicht eindeutig bestimmt sind. Macht man sich jedoch die Tatsache zunutze, daß die lokalen invarianten Mannigfaltigkeiten für verschiedene Einschnitte im Spektrum simultan aus entsprechenden invarianten Mannigfaltigkeiten in einem geeigneten Banachraum gewonnen werden können, so kann man immerhin noch zeigen, daß die stabilen Mannigfaltigkeiten zu Parameterwerten $\mu > 0$ entlang der streng stabilen Mannigfaltigkeiten glatt zusammenpassen. (Analoges gilt auch für die instabilen Mannigfaltigkeiten.) Dies ist der wesentliche Inhalt des Theorems 3.2.1. Der technisch äußerst aufwendige Beweis benutzt intensiv das Konstruktionsprinzip invarianter Mannigfaltigkeiten für Fixpunkte in Banachräumen. Dieses wird daher zunächst in Abschnitt 3.1 erläutert. Hier werden außerdem einige nützliche Eigenschaften der hier benutzten Methodik gezeigt. Anschließend wird in Abschnitt 3.2 obiges Theorem formuliert und bewiesen. Der Beweis hierbei eingehender technischer Lemmata findet sich in Abschnitt 3.3.

Abschließend werden im Appendix einige benutzte Sätze über invariante Mannigfaltigkeiten für Fixpunkte diskutiert.

Danksagung:

Mein besonderer Dank gilt Herrn Prof. Dr. H. F. Münzner, der durch zahlreiche Anregungen und unermüdliche Diskussionsbereitschaft wesentlich zum Zustandekommen der vorliegenden Arbeit beigetragen hat.

Weiterhin möchte ich Herrn Prof. Dr. L. Arnold danken, der den Anstoß zu dieser Arbeit gab und mich stets tatkräftig unterstützt hat.

1 Produkte zufälliger Diffeomorphismen

In diesem Abschnitt soll die stochastische Ausgangssituation erläutert sowie eine für unsere Zwecke angemessene Version des multiplikativen Ergodensatzes angegeben werden. Da die hier behandelten Sachverhalte bereits an anderen Stellen häufig diskutiert worden sind (eine ausführliche Darstellung mit diversen Erläuterungen, Beispielen und Bemerkungen findet sich z.B. bei Boxler [2, Kap. II,III]) wurde dieser Abschnitt bewußt kurz gehalten.

Sei nun M eine kompakte, Riemannsche Mannigfaltigkeit, welche wir uns im folgenden stets mit dem Levi-Civita-Zusammenhang versehen denken. Die Menge der C^2 -Diffeomorphismen von M bezeichnen wir mit $\text{Diff}^2(M)$.

Sei weiter auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ eine stationäre, ergodische Folge $\{\xi_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ von Zufallsvariablen mit Werten in einem Meßraum $(Y, \mathcal{Y})$ gegeben. OBdA können wir stets $\Omega = Y^{\mathbb{Z}}$ gewählt denken. Auf $Y^{\mathbb{Z}}$ können wir nun einen Shift einführen, das heißt wir erhalten eine maßtreue Transformation ϑ_n durch:

$$\vartheta_n \omega(\cdot) = \omega(\cdot + n), \quad n \in \mathbb{Z}$$

Für alle $n \in \mathbb{Z}$ gilt dann: $\xi_n = \xi_0 \circ \vartheta_n$. Sei nun $G : Y \longrightarrow \text{Diff}^2(M)$ eine meßbare Abbildung. Wir setzen:

$$\varphi(n, \omega, \cdot) := \begin{cases} G_n(\omega) \circ G_{n-1}(\omega) \circ \dots \circ G_1(\omega) & : n > 0 \\ Id & : n = 0 \\ G_{n+1}^{-1}(\omega) \circ G_{n+2}^{-1}(\omega) \circ \dots \circ G_{-1}^{-1}(\omega) \circ G_0^{-1}(\omega) & : n < 0 \end{cases}$$

Dabei ist $G_n(\omega) := G(\xi_n(\omega)) = G(\xi_0 \circ \vartheta_n(\omega))$.

Es ist nun leicht zu sehen, daß φ einen *Kozykel über ϑ_n* definiert, d.h. es gilt

$$\varphi(n+m, \omega, \cdot) = \varphi(n, \vartheta_m \omega, \cdot) \circ \varphi(m, \omega, \cdot) \quad \text{für alle } m, n \in \mathbb{Z}$$

Systeme dieser Art werden häufig als zufällige dynamische Systeme auf M über ϑ_n bezeichnet, siehe z.B. Crauel [7, Def. 1.1]. Dem Kozykel φ läßt sich nun folgendermaßen ein Schiefproduktfluß Θ_n zuordnen:

$$\begin{aligned} \Theta_n : \Omega \times M &\rightarrow \Omega \times M \\ (\omega, x) &\mapsto (\vartheta_n \omega, \varphi(n, \omega, x)) \end{aligned}$$

Definition 1.1

Ein Wahrscheinlichkeitsmaß ν auf $\Omega \times M$ heißt invariantes Maß für den Kozykel φ , wenn gilt

- (i) $\Theta_n \nu = \nu$ für alle $n \in \mathbb{Z}$
- (ii) $\pi_\Omega \nu = P$
wobei $\pi_\Omega : \Omega \times M \rightarrow \Omega$ die Projektion auf die erste Komponente bezeichnet.

Man kann zeigen, daß in dem hier gewählten Kontext stets invariante Maße existieren. Ein Beweis findet sich zum Beispiel bei Crauel [7, Kap. 1.2].

Theorem A (Multiplikativer Ergodensatz von Oseledec):

Gegeben seien ein Kozykel φ auf M und ein invariantes, ergodisches Wahrscheinlichkeitsmaß ν auf $\Omega \times M$. Ferner sei die folgende Integrabilitätsbedingung erfüllt:

$$\int_{\Omega \times M} [\log^+ \|T\varphi(1, \omega, x)\| + \log^+ \|[T\varphi(1, \omega, x)]^{-1}\|] d\mu(\omega, x) < \infty$$

Dann gibt es eine Θ_n -invariante Teilmenge $\Gamma \subset \Omega \times M$ mit $\nu(\Gamma) = 1$ und r reelle Zahlen $\lambda_1 < \dots < \lambda_r$ mit Vielfachheiten d_i , $\sum_{i=1}^r d_i = d = \dim M$, so daß gilt:

- i) Für alle $(\omega, x) \in \Gamma$ existiert eine Aufspaltung
 $T_x M = E_1(\omega, x) \oplus \dots \oplus E_r(\omega, x)$
wobei die Unterräume $E_i(\omega, x)$ meßbar von (ω, x) abhängen, mit
 $\dim E_i(\omega, x) = d_i$
 $E_i(\Theta_n(\omega, x)) = T\varphi(n, \omega, x)E_i(\omega, x)$ (Invarianz)
- ii) Für alle $(\omega, x) \in \Gamma$ gilt:
 $\xi \in E_i(\omega, x) \Rightarrow \lambda^\pm(\omega, x, \xi) = \lim_{n \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{n} \log \|T\varphi(n, \omega, x)\xi\| = \lambda_i$

Bemerkungen:

- (i) Die Zahlen $(\lambda_i)_{i=1, \dots, r}$ heißen *Lyapunov-Exponenten*, die Menge der Paare $(\lambda_i, d_i)_{i=1, \dots, r}$ das *Lyapunov-Spektrum* von φ bezüglich ν .
- (ii) Die Räume $E_i(\omega, x)$ heißen *Oseledec-Räume*.
- (iii) Wir haben der Einfachheit halber Ergodizität des invarianten Maßes vorausgesetzt. Theorem A bleibt auch richtig, wenn diese Bedingung nicht erfüllt ist, nur hängen



dann in der Regel die Lyapunov-Exponenten und ihre Vielfachheiten in nichttrivialer Weise vom Orbit zu (ω, x) ab. Die Untersuchungen in den folgenden Kapiteln lassen sich auch für diesen Fall durchführen, dies erhöht aber lediglich den technischen Aufwand, ohne neue Einsichten zu liefern.

2 Lokale invariante Mannigfaltigkeiten

2.1 Stabile Mannigfaltigkeiten

In diesem Abschnitt soll die Existenz lokaler stabiler Mannigfaltigkeiten bewiesen werden. Hierbei ist unter einer stabilen Mannigfaltigkeit zum Parameterwert $\mu \in \mathbb{R}$ im Folgenden stets eine invariante Familie von C^1 -Untermannigfaltigkeiten tangential an eine aus den Räumen $V_\mu^s(\omega, x) := \oplus_{\lambda_i < \mu} E_i(\omega, x)$ bestehende Familie von Unterräumen zu verstehen. Man beachte, daß hier ausdrücklich nicht $\mu < 0$ vorausgesetzt wird. (Stabile Mannigfaltigkeiten zu Parameterwerten $\mu > 0$ werden in der Literatur gelegentlich auch als "center-stable manifolds" bezeichnet, siehe z.B. Abraham und Robbin [1, Appendix C].)

Der Beweis des zentralen Theorems geht im wesentlichen den schon im Vorwort skizzierten Gang. Obwohl die prinzipielle Idee recht klar ist, treten bei der konkreten Durchführung diverse technische Probleme auf. Ein Großteil dieser Schwierigkeiten ist in den Aussagen der Lemmata 2.1.2 und 2.1.3 enthalten, deren Beweise aus Gründen der Übersichtlichkeit zunächst zurückgestellt werden und erst in Abschnitt 2.3 erfolgen.

Die gesamte folgende Konstruktion hängt von einigen, im weiteren ein für allemal fest gewählten Größen ab. Wir wählen zunächst eine (beliebig kleine) Zahl $a > 0$ und konstruieren stabile Mannigfaltigkeiten für Parameterwerte μ disjunkt von allen Intervallen $[\lambda_i - a, \lambda_i + a]$. Hierzu muß eine Riemann-Metrik fest gewählt und eine dieser Metrik angepaßte, bestimmten Voraussetzungen genügende Abschneidefunktion konstruiert werden. Die damit gewonnenen Mannigfaltigkeiten können somit zunächst sowohl von den Größen a und μ als auch von der Riemann-Metrik und der Gestalt der Abschneidefunktion abhängen. Weiterhin geht in die Konstruktion ein Parameter $\varepsilon > 0$ ein, welcher das exponentielle Wachstum bestimmter auftretender Funktionen bestimmt. Er kann, eventuell auf Kosten der Größe der gewonnenen Mannigfaltigkeiten, im Prinzip beliebig klein gewählt werden. Wir können uns daher im folgenden den Parameter ε stets so klein gewählt denken, daß die Voraussetzungen aller noch zu formulierenden Theoreme simultan erfüllt sind.

Wir werden später sehen (Korollar 2.1.5), daß die durch die obigen Größen eingehende Willkür für $\mu < 0$ nicht dramatisch ist, da dann die stabilen Mannigfaltigkeiten eine dynamische Charakterisierung besitzen, welche eine gewisse lokale Eindeutigkeit zur Folge hat. (Für eine weitergehende Diskussion der oben angeschnittenen Problematik siehe Abschnitt 3.)

Nach diesen Vorbemerkungen können wir nunmehr den Hauptsatz dieses Abschnitts formulieren und beweisen:

Theorem 2.1.1 (*Lokale stabile Mannigfaltigkeiten*):

Seien $G(\omega) := \sup_{x \in M} \|T\varphi(1, \omega, x)\|$, $H(\omega) := \sup_{x \in M} \|T^2\varphi(1, \omega, x)\|$. Sei weiter $a \in \mathbb{R}^+$ fest und $\mu \in \mathbb{R}$ disjunkt von $\{\lambda_i - a, \lambda_i + a\}$ für alle λ_i gewählt. Wir setzen

$$V_\mu^s(\omega, x) := \bigoplus_{\lambda_i < \mu} E_i(\omega, x) \quad V_\mu^u(\omega, x) := \bigoplus_{\lambda_i > \mu} E_i(\omega, x)$$

Es seien die Integrabilitätsbedingungen

$$E \log^+(G(\omega)) < \infty, \quad E \log^+(H(\omega)) < \infty$$

erfüllt. Dann existiert eine invariante Menge $\Lambda \subseteq \Gamma$ mit $\nu(\Lambda) = 1$, eine meßbare Funktion $\alpha : \Lambda \times \mathbb{N} \rightarrow]0, \infty[$ und eine Familie $\{W_\mu^s(\omega, x) \mid (\omega, x) \in \Lambda\}$ von C^1 -Untermannigfaltigkeiten derart, daß gilt:

- i) $\varphi(m, \omega, \cdot)(W_\mu^s(\omega, x) \cap B(x, \alpha(\omega, x, n))) \subset W_\mu^s(\Theta_m(\omega, x))$ für $0 \leq m \leq n$
- ii) $x \in W_\mu^s(\omega, x)$ und $T_x W_\mu^s(\omega, x) = V_\mu^s(\omega, x)$.
- iii) Die Mannigfaltigkeiten W_μ^s sind meßbar in (ω, x) .

Bemerkungen:

- i) Die erste Aussage präzisiert, was im vorliegenden Kontext unter Invarianz zu verstehen ist, die zweite Aussage ist die schon erwähnte Forderung nach Tangentialität an die "richtigen" Unterräume. Da es etwas kompliziert ist, in diesem Zusammenhang zu definieren, was Meßbarkeit der W_μ^s genau bedeuten soll, und man hierzu auf die Konstruktionsprinzipien der W_μ^s zurückgehen muß, wird Teil iii) erst später bewiesen. Er bildet den Gegenstand von Korollar 2.1.7.
- ii) Unter der etwas lax formulierten zweiten Integrabilitätsbedingung ist genauer folgendes zu verstehen: Wir wählen aus der zugrundeliegenden C^∞ -Struktur von M eine endliche Kartenüberdeckung $(U_i, \psi_i)_{i=1, \dots, n}$ aus. Dies ist möglich, da M als kompakt vorausgesetzt war. Sodann setzen wir $H(\omega) := \max_{i,j} (\sup_{x \in U_i} \|D_x^2(\psi_j \circ \varphi(1, \omega, \cdot) \circ \psi_i^{-1})\|)$.
- iii) Die Integrabilitätsbedingungen werden benötigt, um Lemma 2.1.3 zu zeigen. Ohne dieses Lemma kann man zwar noch die Existenz invarianter Mannigfaltigkeiten zeigen, jedoch wird deren Größe entlang eines Orbits nicht mehr kontrollierbar. Dies wiederum hat zur Folge, daß man zum Beispiel Korollar 2.1.5 nicht mehr zeigen kann.

Beweis von 2.1.1:

Zunächst werden auf TM neue, meßbare, von ω abhängige Normen eingeführt. Wir setzen:

$$\begin{aligned} |\xi|_{(\omega, x)} &:= \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-(\lambda_i + a)n) \|T \varphi(n, \omega, x)\xi\| \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \exp((\lambda_i - a)n) \|T \varphi(-n, \omega, x)\xi\| \quad \text{für } \xi \in E_i(\omega, x) \\ |\xi|_{(\omega, x)} &:= \max_i |\xi|_{(\omega, \tilde{x})} \quad \text{für } \xi = \sum_{i=1}^r \xi_i, \xi_i \in E_i(\omega, x) \end{aligned}$$

Normen bzw. Metriken dieser Art werden häufig als Lyapunov-Metriken bezeichnet. Die Konvergenz der auftretenden Reihen sichert der multiplikative Ergodensatz. Man beachte, daß, im Gegensatz zu deterministischen Konzepten, in obiger Definition jeder einzelne Oseledec-Raum isoliert behandelt und das dynamische Verhalten in beide Zeitrichtungen berücksichtigt wird. Dies ist, im Hinblick auf spätere Untersuchungen (Oseledec-Mannigfaltigkeiten usw.), einerseits systematisch, andererseits aber auch hier schon notwendig, da man sonst aufgrund fehlender Kompaktheitsargumente die später benötigte, weiter unten formulierte Aussage (α) nicht zeigen könnte.

Wir wollen zunächst untersuchen, wie sich die Tangentialabbildung in der neuen Norm verhält. Es soll hierzu gezeigt werden:

$$\begin{aligned} &\exp(\lambda_i + a) |\xi|_{(\omega, x)} \\ &\geq \|T\varphi(1, \omega, x)\xi\|_{\Theta(\omega, x)} \geq \exp(\lambda_i - a) |\xi|_{(\omega, x)}, \quad \xi \in E_i(\omega, x) \\ &\exp(-(\lambda_i - a)) |\xi|_{\Theta(\omega, x)} \\ &\geq \|T\varphi(1, \omega, x)\xi\|_{(\omega, \tilde{x})} \geq \exp(-(\lambda_i + a)) |\xi|_{\Theta(\omega, x)}, \quad \xi \in E_i(\Theta(\omega, x)) \end{aligned} \tag{1}$$

Wir wollen nur den Beweis der ersten Ungleichungskette ausführlich darstellen. Sei hierzu $\xi \in E_i(\omega, x)$. Nach Theorem A gilt dann $T\varphi(1, \omega, x)\xi \in E_i(\Theta(\omega, x))$, damit ergibt sich:

$$\begin{aligned}
& |T\varphi(1, \omega, x)\xi|_{\Theta(\omega, x)} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-(\lambda_i + a)n) \| T\varphi(n, \Theta(\omega, x))T\varphi(1, \omega, x)\xi \| \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \exp((\lambda_i - a)n) \| T\varphi(-n, \Theta(\omega, x))T\varphi(1, \omega, x)\xi \| \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-(\lambda_i + a)n) \| T\varphi(n, \vartheta\omega, \varphi(1, \omega, x))T\varphi(1, \omega, x)\xi \| \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \exp((\lambda_i - a)n) \| T\varphi(-n, \vartheta\omega, \varphi(1, \omega, x))T\varphi(1, \omega, x)\xi \| \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-(\lambda_i + a)n) \| T_x(\varphi(n, \vartheta\omega, \cdot) \circ \varphi(1, \omega, \cdot))\xi \| \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \exp((\lambda_i - a)n) \| T_x(\varphi(-n, \vartheta\omega) \circ \varphi(1, \omega, \cdot))\xi \| \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-(\lambda_i + a)n) \| T\varphi(n+1, \omega, x)\xi \| \\
&\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \exp((\lambda_i - a)n) \| T\varphi(-(n-1), \omega, x)\xi \| \\
&= \exp(\lambda_i + a) \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-(\lambda_i + a)(n+1)) \| T\varphi(n+1, \omega, x)\xi \| \\
&\quad + \exp((\lambda_i - a) \sum_{n=1}^{\infty} \exp((\lambda_i - a)(n-1)) \| T\varphi(-(n-1), \omega, x)\xi \| \\
&\leq \exp((\lambda_i + a) \{ \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-(\lambda_i + a)n) \| T\varphi(n, \omega, x)\xi \| \\
&\quad + \sum_{n=0}^{\infty} \exp((\lambda_i - a)n) \| T\varphi(-n, \omega, x)\xi \| \}) \\
&= \exp(\lambda_i + a) | \xi |_{(\omega, x)}
\end{aligned}$$

Auf dieselbe Weise ergibt sich:

$$|T\varphi(1, \omega, x)\xi|_{\Theta(\omega, x)} \geq \exp(\lambda_i - a) | \xi |_{(\omega, x)}$$

Die Ungleichungen für $(T\varphi(1, \omega, x))^{-1}$ lassen sich analog herleiten. (Man benutze hierbei die Tatsache, daß die Kozykeleigenschaft von φ die Identität $(T\varphi(1, \omega, x))^{-1} = T\varphi(-1, \vartheta\omega, \varphi(1, \omega, x))$ zur Folge hat.)

Im Hinblick auf spätere Anwendungen geben wir nun ein Lemma an, welches das Verhältnis der neuen Norm zur ursprünglichen Riemann-Metrik beschreibt:

Lemma 2.1.2 :

Für alle $\varepsilon > 0$ existiert eine meßbare Funktion $B(\omega, x, \varepsilon)$ derart, daß für alle $\xi \in T_x M$ gilt:

$$\|\xi\| r^{-1} \leq \|\xi\|_{(\omega, x)} \leq B(\omega, x, \varepsilon) \|\xi\|$$

$$B(\Theta_n(\omega, x), \varepsilon) \leq B(\omega, x, \varepsilon) \exp(\varepsilon |n|) \quad n \in \mathbb{Z}$$

Hierbei bezeichnet r die Anzahl der Lyapunov-Exponenten entsprechend Theorem A.

Beweis:

Siehe Abschnitt 2.3 □

Nunmehr soll der zugrundeliegende Kozykel mittels der Exponentialabbildung (lokal) auf das Tangentialbündel geliftet werden, das heißt wir setzen für hinreichend kleine Umgebungen $U_{(\omega, x)}$ von $0 \in T_x M$:

$$f_{(\omega, x)} : U_{(\omega, x)} \longrightarrow T_{\varphi(1, \omega, x)} M$$

$$\xi \longmapsto \text{Exp}_{\varphi(1, \omega, x)}^{-1} \circ \varphi(1, \omega, \cdot) \circ \text{Exp}_x(\xi)$$

Diese Abbildungen sollen nun im Hinblick auf spätere Anwendungen auf ganz $T_x M$ fortgesetzt werden. Dies geschieht durch hinreichend glattes Zusammensetzen mit der Tangentialabbildung. Hierzu kann man zeigen:

Lemma 2.1.3 :

Für alle $\varepsilon, \zeta > 0$ existiert auf einer Θ_n -invarianten Menge $\Lambda, \Lambda \subset \Gamma, \nu(\Lambda) = 1$ eine Funktion $C(\omega, x, \varepsilon)$ mit

$$F_{(\omega, x)} : T_x M \longrightarrow T_{\varphi(1, \omega, x)} M$$

$$\xi \longmapsto T\varphi(1, \omega, x)\xi + (f_{(\omega, x)} - T\varphi(1, \omega, x))(\xi) \cdot g\left(\frac{\delta^2 \|\xi\|^2}{2r^2 C(\omega, x, \varepsilon)^2}\right)$$

ist für alle $(\omega, x) \in \Lambda$ wohldefiniert und es gilt:

$$(a) \text{ Lip}_1(F_{(\omega, x)} - T\varphi(1, \omega, x)) < \zeta$$

- (b) $F_{(\omega, x)}(\xi) = f_{(\omega, x)}(\xi) \quad \text{für } |\xi|_{(\omega, x)} \leq C(\omega, x, \varepsilon)$
- (c) $C(\Theta_n(\omega, x), \varepsilon) \geq C(\omega, x, \varepsilon) \exp(-\varepsilon |n|), \quad n \in \mathbb{Z}$
- (d) $DF_{(\omega, x)}$ genügt einer Hölder-Bedingung der Ordnung $\frac{1}{2}$ mit Hölder-Konstanten < 1 , d.h. es gilt

$$Lip_{\frac{1}{2}} DF_{(\omega, x)} < 1.$$

Hierbei bezeichnet g eine geeignet gewählte C^∞ -Abschneidefunktion und δ eine nur von der geometrischen Struktur von M abhängige Konstante.

Beweis:

Siehe Abschnitt 2.3 . □

Betrachten wir nun das meßbare Vektorraumbündel

$$(\Omega \times M, \Omega \times TM, \pi)$$

mit

$$\pi(\omega, \xi) = (\omega, \pi_M \xi)$$

wobei π_M die kanonische Projektion von TM auf M bezeichnet. Wir werden uns im folgenden stets auf das Unterbündel

$$(\Lambda, \pi^{-1}(\Lambda), \pi)$$

beschränken. Nunmehr wollen wir einen Banachraum konstruieren, der aus beschränkten, aber sonst beliebigen, d.h. nicht notwendigerweise meßbaren Schnitten des Bündels $(\Lambda, \pi^{-1}(\Lambda), \pi)$ besteht. Ein solcher Schnitt S ist offenbar stets von der Form

$$S(\omega, x) = (\omega, \sigma(\omega, x))$$

Damit wird folgende Definition sinnvoll:

$B :=$ Banachraum der beschränkten Schnitte mit der sup-Norm, also

$$\|S\| := \sup_{(\omega, x) \in \Lambda} \|\sigma(\omega, x)\| < \infty$$

Aus dem multiplikativen Ergodensatz folgt sofort, daß B eine Zerlegung

$$B = B_1 \oplus B_2 \oplus \dots \oplus B_r$$

mit

$$B_i = \{S \in B \mid \sigma(\omega, x) \in E_i(\omega, x) \quad \forall (\omega, x) \in \Lambda\}$$

besitzt.

Wir setzen

$$B_\mu^s := \bigoplus_{\lambda_1 < \mu} B_i \quad B_\mu^u := \bigoplus_{\lambda_1 > \mu} B_i$$

Die in Lemma 2.1.3 konstruierten Abbildungen $F_{(\omega, x)}$ können nun zu einer Abbildung $\mathcal{F}$ auf B fortgesetzt werden. Wir setzen hierzu:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}: B &\longrightarrow B \\ (\mathcal{F}S)(\omega, x) &= (\omega, F_{\Theta_{-1}(\omega, x)}\sigma(\Theta_{-1}(\omega, x))) \end{aligned}$$

Analog kann auch mit der Tangentialabbildung verfahren werden, d.h. wir können definieren

$$\begin{aligned} \mathcal{T}: B &\longrightarrow B \\ (\mathcal{T}S)(\omega, x) &= (\omega, T\varphi(1, \Theta_{-1}(\omega, x))\sigma(\Theta_{-1}(\omega, x))) \end{aligned}$$

Für $\mathcal{F}$ und $\mathcal{T}$ gilt nun

(α) $\mathcal{T}$ ist ein Banachraumisomorphismus

(β) $\|\mathcal{T}\|_{B_\mu^s} \leq \exp(\lambda_m + a) < \exp \mu < \exp(\lambda_{m+1} - a) \leq |\mathcal{T}^{-1}|_{B_\mu^u}|^{-1}$ mit $\lambda_m := \max_{\lambda_1 < \mu} \lambda_1$

(γ) $\mathcal{F} - \mathcal{T}$ ist Lipschitz-stetig mit $\text{Lip}(\mathcal{F} - \mathcal{T}) \leq \zeta$

zu (α) : Zunächst gilt wegen Gleichung (1)

$$\begin{aligned} |T|_{B_i}| &= \sup_{S \in B_i; |S|=1} |TS| = \sup_{S \in B_i; |S|=1} \sup_{(\omega, x)} |T\varphi(1, \Theta_{-1}(\omega, x))\sigma(\Theta_{-1}(\omega, x))|_{(\omega, x)} \\ &\leq \sup_{S \in B_i; |S|=1} \sup_{(\omega, x)} (\exp(\lambda_i + a)|\sigma(\Theta_{-1}(\omega, x))|_{\Theta_{-1}(\omega, x)}) \\ &\leq \exp(\lambda_i + a) \end{aligned}$$

Hieraus folgt wegen $|T| \leq \max |T|_{B_i} \leq \exp(\lambda_r + a)$ die Beschränktheit von T . Es ist klar, daß T die Umkehrabbildung $T^{-1} : (T^{-1}S)(\omega, x) = (\omega, (T\varphi(1, \omega, x))^{-1}\sigma(\Theta(\omega, x)))$ besitzt, welche aufgrund analoger Abschätzungen wie oben wegen Gleichung (1) ebenfalls beschränkt ist. Damit ist (α) bewiesen.

zu (β) : Folgt aus den Abschätzungen

$$\begin{aligned} |T|_{B_\mu^e} &\leq \max_{\lambda_i < \mu} |T|_{B_i} \leq \max_{\lambda_i < \mu} \exp(\lambda_i + a) \leq \exp(\lambda_m + a) \\ |T^{-1}|_{B_\mu^u} &\leq \max_{\lambda_i > \mu} |T^{-1}|_{B_i} \leq \max_{\lambda_i > \mu} \exp(-(\lambda_i - a)) \leq \exp(-(\lambda_{m+1} - a)) \end{aligned}$$

zu (γ) : Folgt unter Benutzung von Lemma 2.1.3(a). Es gilt ja:

$$\begin{aligned} &|(\mathcal{F} - T)S - (\mathcal{F} - T)\tilde{S}| \\ &= \sup_{(\omega, x)} |F_{\Theta_{-1}(\omega, x)}\sigma(\Theta_{-1}(\omega, x)) - T\varphi(1, \Theta_{-1}(\omega, x))\sigma(\Theta_{-1}(\omega, x)) \\ &\quad - \{F_{\Theta_{-1}(\omega, x)}\tilde{\sigma}(\Theta_{-1}(\omega, x)) - T\varphi(1, \Theta_{-1}(\omega, x))\tilde{\sigma}(\Theta_{-1}(\omega, x))\}|_{(\omega, x)} \\ &\leq \zeta \sup_{(\omega, x)} |\sigma(\Theta_{-1}(\omega, x)) - \tilde{\sigma}(\Theta_{-1}(\omega, x))|_{\Theta_{-1}(\omega, x)} \\ &\leq \zeta |S - \tilde{S}| \end{aligned}$$

Wir sind nunmehr in der Lage, den folgenden Satz über invariante Mannigfaltigkeiten anzuwenden (für weitere Erläuterungen hierzu siehe Appendix)

Theorem B:

Sei T ein Isomorphismus eines Banachraumes E mit invarianten Unterräumen E_1, E_2 derart, daß gilt: $E = E_1 \oplus E_2$. Setze $T_i := T|_{E_i}$. Sei $\|T_1\| < \|T_2^{-1}\|^{-1}$ und $\kappa \in \mathbb{R}$ so gewählt, daß gilt $\|T_1\| < \kappa < \|T_2^{-1}\|^{-1}$. Sei weiter $f : E \rightarrow E$ eine globale Lipschitz-Abbildung mit $f(0) = 0$ und $\text{Lip}(f - T) = \ell < \min(\kappa - \|T_1\|, \|T_2^{-1}\|^{-1} - \kappa)$. Dann ist die Menge

$$W^{s,\kappa} := \{x \in E \mid \sup_{n \geq 0} \|\kappa^{-n} f^n(x)\| < \infty\}$$

der Graph einer Lipschitz-stetigen Abbildung $g : E_1 \rightarrow E_2$ mit $g(0) = 0$ und $\text{Lip } g < 1$. Weiter gilt $\text{Lip}(f|W^{s,\kappa}) \leq \|T_1\| + \ell$, woraus $\lim_{n \rightarrow \infty} \kappa^{-n} f^n(x) = 0$ für $x \in W^{s,\kappa}$ folgt.

Nunmehr wird der Sinn der Aussagen (α) , (β) und (γ) deutlich. Aus ihnen folgt nämlich sofort, daß mit:

$$E \hat{=} B, \quad E_1 \hat{=} B_\mu^s, \quad E_2 \hat{=} B_\mu^u, \quad T \hat{=} \mathcal{T}, \quad f \hat{=} \mathcal{F}, \quad \kappa \hat{=} \exp \mu$$

die Voraussetzungen von Theorem B erfüllt sind.

Es gilt daher: Die Menge

$$W^{s,\mu} := \{S \in B \mid \sup_{n \geq 0} |\exp(-\mu n) \mathcal{F}^n S| < \infty\}$$

ist Graph einer Funktion $\mathcal{G} : B_\mu^s \rightarrow B_\mu^u$ mit $\mathcal{G}(0) = 0$ $\text{Lip } \mathcal{G} < 1$.

Man kann nun zeigen, daß die Abbildung $\mathcal{G}$ in Abbildungen der einzelnen Tangentialräume auffasert. Die Graphen dieser so gewonnenen Abbildungen bestimmen dann direkt die gesuchten invarianten Mannigfaltigkeiten, sie müssen nur noch (lokal) mittels der Exponentialabbildung "ausgesprayed" werden. Es gilt:

Lemma 2.1.4 :

Für alle $(\omega, x) \in \Lambda$ induziert $\mathcal{G}$ Abbildungen

$$\mathcal{G}(\omega, x) : V_\mu^s(\omega, x) \longrightarrow V_\mu^u(\omega, x)$$

mit

$$\mathcal{G}(S)(\omega, x) = (\omega, \mathcal{G}(\omega, x)\sigma(\omega, x))$$

Beweis:

In Abschnitt 3 wird erläutert, daß man die invariante Mannigfaltigkeit $W^{s,\kappa}$ als Fixpunkt eines kontrahierenden Operators in einem geeigneten Funktionenraum mit dem Problem angepaßter Metrik gewinnen kann. In Lemma 3.1.2 wird sodann gezeigt, daß die Funktionen mit der oben geforderten Eigenschaft einen bzgl. dieser Metrik abgeschlossenen

und unter dem gewählten Operator invarianten Unterraum bilden. Da damit auch der Fixpunkt in diesem Raum liegen muß, ist das Lemma bewiesen. $\square$

Unsere invariante Familie von Untermannigfaltigkeiten kann nunmehr explizit konstruiert werden. Wir setzen

$$W_\mu^s(\omega, x) := \text{Exp}_x\{\xi \in \text{Graph } \mathcal{G}(\omega, x) \mid |\xi|_{(\omega, x)} \leq C(\omega, x, \varepsilon)\}$$

Es ist nun zu zeigen, daß die so definierten Objekte tatsächlich die in Theorem 2.1.1 geforderten Eigenschaften besitzen.

Hierzu soll zunächst Teil i) gezeigt, das heißt eine geeignete Abbildung $\alpha(\omega, x, n)$ konstruiert werden. Wir sind jedenfalls dann fertig, wenn wir eine Funktion α derart gefunden haben, daß gilt:

$$\begin{aligned} z &\in W_\mu^s(\omega, x) \cap B(x, \alpha(\omega, x, n)) \\ \Rightarrow |F_{\Theta_{m-1}(\omega, x)} \circ \dots \circ F_{(\omega, x)} \circ \text{Exp}_x^{-1}(z)|_{\Theta_m(\omega, x)} &\leq C(\Theta_m(\omega, x), \varepsilon). \end{aligned}$$

für alle $m \leq n$.

Dies kann man wie folgt einsehen:

Sei $z \in W_\mu^s(\omega, x)$, d.h. $z = \text{Exp}_x(\xi)$ für ein $\xi \in \text{Graph } \mathcal{G}(\omega, x)$.
Wir setzen zunächst:

$$\delta_{(\omega, x)}^\xi(\tilde{\omega}, \tilde{x}) := \begin{cases} (\tilde{\omega}, \xi) & \text{falls } (\tilde{\omega}, \tilde{x}) = (\omega, x) \\ (\tilde{\omega}, o) & \text{sonst} \end{cases}$$

Dann gilt offenbar: $\delta_{(\omega, x)}^\xi \in \text{Graph } \mathcal{G}$. Da aber $\text{Graph } \mathcal{G}$ nach Konstruktion eine unter $\mathcal{F}$ invariante Mannigfaltigkeit ist, muß ebenfalls gelten: $\mathcal{F}^m \delta_{(\omega, x)}^\xi \in \text{Graph } \mathcal{G}$. Nun ist aber

$$\begin{aligned} (\mathcal{F}^m \delta_{(\omega, x)}^\xi)(\tilde{\omega}, \tilde{x}) &= \begin{cases} (\vartheta_m \omega, F_{\Theta_{m-1}(\omega, x)} \circ \dots \circ F_{(\omega, x)}(\xi)) & \text{falls } (\tilde{\omega}, \tilde{x}) = \Theta_m(\omega, x) \\ (\tilde{\omega}, 0) & \text{sonst} \end{cases} \\ &= \delta_{\Theta_m(\omega, x)}^{F_{\Theta_{m-1}(\omega, x)} \circ \dots \circ F_{(\omega, x)}(\xi)} \end{aligned}$$

Damit folgt also

$$F_{\Theta_{m-1}(\omega, x)} \circ \dots \circ F_{(\omega, x)}(\xi) \in \text{Graph } \mathcal{G}(\Theta_m(\omega, x))$$

Hätten wir daher eine der oben angeführten Bedingung genügende Funktion α gefunden, so würde aus der Tatsache, daß nach Lemma 2.1.3 (b) $F_{(\omega,x)}$ für $|\xi|_{(\omega,x)} \leq C(\omega, x, \varepsilon)$ mit $f_{(\omega,x)}$ übereinstimmt, der Definition von $f_{(\omega,x)}$ und der Kozykel-Eigenschaft von φ folgen:

$$\begin{aligned}
C(\Theta_m(\omega, x), \varepsilon) &\geq |F_{\Theta_{m-1}(\omega, x)} \circ \dots \circ F_{(\omega, x)}(\xi)|_{\Theta_m(\omega, x)} \\
&= |f_{\Theta_{m-1}(\omega, x)} \circ \dots \circ f_{(\omega, x)}(\xi)|_{\Theta_m(\omega, x)} \\
&= |\text{Exp}_{\varphi(1, \vartheta_{m-1}(\omega), \varphi(m-1, \omega, x))}^{-1} \circ \varphi(1, \vartheta_{m-1}(\omega), \cdot) \circ \text{Exp}_{\varphi(m-1, \omega, x)} \\
&\quad \circ \text{Exp}_{\varphi(1, \vartheta_{m-2}(\omega), \varphi(m-2, \omega, x))}^{-1} \circ \dots \circ \varphi(1, \omega, \cdot) \circ \text{Exp}_x(\xi)|_{\Theta_m(\omega, x)} \\
&= |\text{Exp}_{\varphi(m, \omega, x)}^{-1} \circ \varphi(1, \vartheta_{m-1}(\omega), \cdot) \circ \varphi(1, \vartheta_{m-2}(\omega), \cdot) \circ \dots \circ \varphi(1, \omega, \cdot) \\
&\quad \circ \text{Exp}_x(\xi)|_{\Theta_m(\omega, x)} \\
&= |\text{Exp}_{\varphi(m, \omega, x)}^{-1} \circ \varphi(m, \omega, \cdot)(z)|_{\Theta_m(\omega, x)}
\end{aligned}$$

Das heißt aber

$$\text{Exp}_{\varphi(m, \omega, x)} \circ \text{Exp}_{\varphi(m, \omega, x)}^{-1} \circ \varphi(m, \omega, \cdot)(z) = \varphi(m, \omega, z) \in W_\mu^s(\Theta_m(\omega, x))$$

und dies ist, was gezeigt werden soll.

Wir setzen:

$$\alpha(\omega, x, n) := \begin{cases} B(\omega, x, \varepsilon)^{-1} C(\omega, x, \varepsilon) \exp(-\varepsilon n) & \text{falls } \exp(\lambda_m + a) + \zeta \leq 1 \\ (\exp(\lambda_m + a) + \zeta)^{-n} B(\omega, x, \varepsilon)^{-1} C(\omega, x, \varepsilon) \exp(-\varepsilon n) & \text{sonst} \end{cases}$$

Wir wollen hier nur den Fall $\exp(\lambda_m + a) + \zeta > 1$ ausführlich darstellen. Der andere Fall ergibt sich analog.

Sei also $z \in W_\mu^s(\omega, x)$, $d(x, z) \leq \alpha(\omega, x, n)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
& |F_{\Theta_{m-1}(\omega, x)} \circ \dots \circ F_{(\omega, x)}(\xi)|_{\Theta_m(\omega, x)} \\
&= |\mathcal{F}^m \delta_{(\omega, x)}^\xi| && \text{siehe oben} \\
&\leq (\exp(\lambda_m + a) + \zeta)^m |\delta_{(\omega, x)}^\xi| && \text{wegen Theorem B} \\
&= (\exp(\lambda_m + a) + \zeta)^m |\xi|_{(\omega, x)} \\
&\leq (\exp(\lambda_m + a) + \zeta)^m B(\omega, x, \varepsilon) \|\xi\| && \text{wegen Lemma 2.1.2} \\
&= (\exp(\lambda_m + a) + \zeta)^m B(\omega, x, \varepsilon) d(x, z) \\
&\leq (\exp(\lambda_m + a) + \zeta)^n B(\omega, x, \varepsilon) \alpha(\omega, x, n) \\
&\leq (\exp(\lambda_m + a) + \zeta)^m B(\omega, x, \varepsilon) \\
&\quad \{(\exp(\lambda_m + a) + \zeta)^{-m} B(\omega, x, \varepsilon)^{-1} C(\omega, x, \varepsilon) \exp(-\varepsilon n)\} \\
&\leq C(\omega, x, \varepsilon) \exp(-\varepsilon n) && \text{da } \exp(\lambda_m + a) + \zeta > 1 \\
&\leq C(\omega, x, \varepsilon) \exp(-\varepsilon m) && \text{für } m < n \\
&\leq C(\Theta_m(\omega, x), \varepsilon) && \text{wegen Lemma 2.1.3}
\end{aligned}$$

Damit ist Teil i) bewiesen.

Es bleibt nun noch Teil ii), das heißt die Differenzierbarkeit der $W_\mu^s(\omega, x)$, zu zeigen. Aus dem zugrundeliegenden Konstruktionsprinzip wird klar, wie hierzu am besten vorzugehen ist: Man zeige zunächst Differenzierbarkeit und Tangentialität für $W^{s, \mu}$ und schließe hieraus, daß die einzelnen $W_\mu^s(\omega, x)$ dieselben Eigenschaften besitzen.

Wir wollen den folgenden Satz benutzen:

Theorem C:

Es seien die Voraussetzungen von Theorem B erfüllt. Ist dann zusätzlich f eine C^1 -Abbildung und $\text{Lip}(f - T)$ hinreichend klein, so ist g ebenfalls eine C^1 -Abbildung. Gilt außerdem $Df(0) = T$, so folgt $Dg(0) = 0$, das heißt g ist tangential an E_1 .

Um Theorem C anwenden zu können, ist zunächst die Differenzierbarkeit von $\mathcal{F}$ zu zeigen. Wir werden folgende Beobachtung benutzen:

Sei f eine C^1 -Abbildung zwischen Banachräumen, deren Ableitung einer Hölder-Bedingung der Ordnung α genügt. Dann gilt:

$$\|f(x+y) - f(x) - D_x f(y)\| \leq C \|y\|^\alpha \|y\|$$

(Mit f ist auch die Abbildung $F : y \rightarrow f(x+y) - f(x) - D_x f(y)$ differenzierbar und es gilt: $D_y F = D_{x+y} f - D_x f$. Dies heißt aber

$$\|D_y F\| = \|D_{x+y} f - D_x f\| \leq C \|y\|^\alpha$$

Damit folgt die behauptete Ungleichung unter Benutzung des Mittelwertsatzes.)

Wir definieren nun eine Abbildung

$$\begin{aligned} D\mathcal{F}(S) : B &\longrightarrow B \\ D\mathcal{F}(S)(\tilde{S})(\omega, x) &= (\omega, D_{\sigma(\Theta_{-1}(\omega, x))} F_{\Theta_{-1}(\omega, x)} \tilde{\sigma}(\Theta_{-1}(\omega, x))) \end{aligned}$$

Es soll zunächst gezeigt werden, daß $D\mathcal{F}(S)$ tatsächlich die Ableitung von $\mathcal{F}$ im Punkt S ist. Nach Lemma 2.1.3 (d) genügt $DF_{(\omega, x)}$ einer Hölder-Bedingung der Ordnung $\frac{1}{2}$, damit erhalten wir unter Benutzung obiger Beobachtung:

$$\begin{aligned} &|\mathcal{F}(S + \tilde{S}) - \mathcal{F}(S) - D\mathcal{F}(S)\tilde{S}| \\ &= \sup_{(\omega, x)} |F_{\Theta_{-1}(\omega, x)}(\sigma(\Theta_{-1}(\omega, x)) + \tilde{\sigma}(\Theta_{-1}(\omega, x))) \\ &\quad - F_{\Theta_{-1}(\omega, x)}\sigma(\Theta_{-1}(\omega, x)) - D_{\sigma(\Theta_{-1}(\omega, x))} F_{\Theta_{-1}(\omega, x)} \tilde{\sigma}(\Theta_{-1}(\omega, x))|_{(\omega, x)} \\ &\leq \sup_{(\omega, x)} |\tilde{\sigma}(\Theta_{-1}(\omega, x))|_{\Theta_{-1}(\omega, x)}^{\frac{1}{2}} |\tilde{\sigma}(\Theta_{-1}(\omega, x))|_{\Theta_{-1}(\omega, x)} \\ &\leq |\tilde{S}|^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

Also ist $D\mathcal{F}(S)$ tatsächlich die Ableitung von $\mathcal{F}$. Weiter gilt

$$\begin{aligned} D\mathcal{F}(0)S(\omega, x) &= (\omega, D_0 F_{\Theta_{-1}(\omega, x)} \sigma(\Theta_{-1}(\omega, x))) \\ &= (\omega, D_0 f_{\Theta_{-1}(\omega, x)} \sigma(\Theta_{-1}(\omega, x))) \\ &= (\omega, D_0 (\text{Exp}_x^{-1} \circ \varphi(1, \vartheta_{-1}\omega, \cdot) \circ \text{Exp}_{\varphi(-1, \omega, x)}) \sigma(\Theta_{-1}(\omega, x))) \\ &= (\omega, T\varphi(1, \Theta_{-1}(\omega, x)) \sigma(\Theta_{-1}(\omega, x))) \end{aligned}$$

wegen $T_0 \text{Exp}_x = \text{Id}$.

Dies heißt aber $D\mathcal{F}(0) = \mathcal{T}$. Mit Theorem C folgt daher:

$\mathcal{G}$ ist differenzierbar und es gilt: $D\mathcal{G}(0) = 0$, d.h. $\mathcal{G}$ ist tangential an B_μ^s .
Wegen

$$\mathcal{G}(\omega, x) = \pi_{(\omega, x)} \circ \mathcal{G} \circ i_{(\omega, x)}$$

mit den stetigen, linearen Operatoren:

$$\begin{array}{ccc} i_{(\omega, x)} : V_\mu^s(\omega, x) & \longrightarrow & B_\mu^s \\ \xi & \longmapsto & \delta_{(\omega, x)}^\xi \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \pi_{(\omega, x)} : B_\mu^u & \longrightarrow & V_\mu^u(\omega, x) \\ \mathcal{S} & \longmapsto & \sigma(\omega, x) \end{array}$$

folgt dann aber: $\mathcal{G}(\omega, x)$ ist differenzierbar und es gilt $D_0\mathcal{G}(\omega, x) = 0$, d.h. $\mathcal{G}(\omega, x)$ ist tangential an $V_\mu^s(\omega, x)$. Damit ist das Theorem bis auf Teil iii) bewiesen. $\square$

Bemerkungen:

- i) Aus dem Beweis von Theorem 2.1.1 wird ersichtlich, daß sich unter Zusatzvoraussetzungen ähnliche Ergebnisse auch für zufällige dynamische Systeme auf *nicht kompakten* Mannigfaltigkeiten erzielen lassen. (Entscheidend ist ja nicht die Kompaktheit an sich, sondern das, was sie bewirkt.) Folgende Modifikationen wären dazu notwendig:

- (α) Wir müßten die Existenz eines invarianten Maßes für φ fordern. (Es gibt Beispiele für Systeme auf nicht kompakten Mannigfaltigkeiten, die kein invariantes Maß besitzen.)
- (β) Wir müßten voraussetzen, daß der Injektivitätsradius der Mannigfaltigkeit verschieden von Null ist.
- (γ) Die Integrabilitätsbedingungen müßten umformuliert werden.

Insbesondere läßt sich obige Theorie für Systeme im $\mathbb{R}^n$ anwenden. Die Integrabilitätsbedingungen reduzieren sich hierbei auf Bedingungen an die gewöhnliche Ableitung.

- ii) Aus der dynamischen Charakterisierung der stabilen Mannigfaltigkeiten $W^{s, \kappa}$ entsprechend Theorem B folgt, daß $W^{s, \mu}$ nicht nur unter $\mathcal{F}$, sondern auch unter $\mathcal{F}^{-1}$ invariant ist. (Im Beweis von Theorem 2.2.1 wird gezeigt, daß $\mathcal{F}^{-1}$ tatsächlich existiert.) Dies hat zur Folge, daß die lokalen stabilen Mannigfaltigkeiten $W_\mu^s(\omega, x)$

auch in Rückwärtsrichtung im Sinne von i) in Theorem 2.1.1 invariant sind. Wir hatten dies nicht explizit erwähnt, da man intuitiv den stabilen Mannigfaltigkeiten eine Charakterisierung des dynamischen Verhaltens in Vorwärtsrichtung zurechnet (und entsprechend umgekehrt für die instabilen Mannigfaltigkeiten). Daß dieses Bild im wesentlichen richtig ist, zeigt zum Beispiel Korollar 2.1.5.

- iii) Der Kozykel φ wurde mittels einer Abbildung $G : Y \rightarrow \text{Diff}^2(M)$ konstruiert. (Siehe Kapitel 1). Wählt man statt dessen $G(\omega) \in \text{Diff}^r(M)$, so hat dies höhere, d.h. $(r - 1)$ -fache, Differenzierbarkeit der $W_\mu^s(\omega, x)$ zur Folge. Dies liegt daran, daß die Differenzierbarkeitsstufe der "kleinen" Mannigfaltigkeiten $W_\mu^s(\omega, x)$ letztlich durch die Glattheit der "großen" Mannigfaltigkeit $W^{s,\mu}$ bestimmt wird. Die Differenzierbarkeit invarianter Mannigfaltigkeiten ist nun aber im Prinzip durch die Differenzierbarkeit der zugrundeliegenden Abbildung bestimmt. Dies ist in unserem Fall die Abbildung $\mathcal{F}$, welche nach Konstruktion stets ähnlich glatt wie der Kozykel φ ist.

Wie bereits erwähnt, läßt sich ein zentrales Ergebnis von Carverhill [5], Theorem 2.2.1 zeitdiskreter Fall, als Spezialfall obiger allgemeiner Konstruktion zurückgewinnen. Präziser gilt:

Korollar 2.1.5 (*Streng stabile Mannigfaltigkeiten*)

Sei $\mu < 0, \varepsilon$ hinreichend klein. Dann existieren meßbare Funktionen $\beta(\omega, x), \gamma(\omega, x)$ so daß gilt:

$$z \in W_\mu^s(\omega, x) \cap B(x, \beta(\omega, x)) \Leftrightarrow z \in B(x, \beta(\omega, x)) \text{ und} \\ d(\varphi(n, \omega, x), \varphi(n, \omega, z)) \leq \gamma(\omega, x) \exp((\mu - \varepsilon)n), \quad n \in \mathbb{N}$$

Bemerkung:

Die Funktionen β und γ lassen sich, wie wir sehen werden, explizit aus den in die Konstruktion der W_μ^s eingehenden Funktionen B und C berechnen, und zwar gilt:

$$\gamma(\omega, x) := \frac{C(\omega, x, \varepsilon)}{B(\omega, x, \varepsilon)} \quad \beta(\omega, x) := \frac{C(\omega, x, \varepsilon)}{rB(\omega, x, \varepsilon)^2}$$

Beweis von 2.1.5:

Der Beweis beruht auf der Beobachtung, daß sich im Fall $\mu < 0$ eine Art Verfeinerung der Funktion α gewinnen läßt. Diese wird dann die Funktion β . Zunächst zeigen wir:

$$\begin{aligned} \text{i) } z \in W_\mu^s(\omega, x) \\ \Rightarrow |\text{Exp}_{\varphi(n, \omega, x)}^{-1} \varphi(n, \omega, z)|_{\Theta_n(\omega, x)} \leq (\exp(\lambda_m + a) + \zeta)^n |\text{Exp}_x^{-1}(z)|_{(\omega, x)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ii) } z \in W_\mu^s(\omega, x) \\ \Leftarrow |\text{Exp}_{\varphi(n, \omega, x)}^{-1} \varphi(n, \omega, z)|_{\Theta_n(\omega, x)} \leq \exp(\mu n) C(\omega, x, \varepsilon) \end{aligned}$$

zu i) Wegen $\mu < 0$ kann ε so klein gewählt werden, daß gilt

$$\exp(\lambda_m + a) + \zeta < \exp \mu < \exp(-\varepsilon)$$

Sei nun $z \in W_\mu^s(\omega, x)$, d.h. $z = \text{Exp}_x(\xi)$, $|\xi|_{(\omega, x)} \leq C(\omega, x, \varepsilon)$. Dann gilt (siehe Beweis von Theorem 2.1.1):

$$\begin{aligned} |F_{\Theta_{n-1}(\omega, x)} \circ \dots \circ F_{(\omega, x)}(\xi)|_{\Theta_n(\omega, x)} &\leq (\exp(\lambda_m + a) + \zeta)^n |\xi|_{(\omega, x)} \\ &\leq \exp(-\varepsilon n) C(\omega, x, \varepsilon) \\ &\leq C(\Theta_n(\omega, x), \varepsilon) \quad \text{wegen Lemma 2.1.3} \end{aligned}$$

Damit folgt aber (siehe Beweis von Theorem 2.1.1)

$$\begin{aligned} (\exp(\lambda_m + a) + \zeta)^n |\text{Exp}_x^{-1}(z)|_{(\omega, x)} &\geq |F_{\Theta_{n-1}(\omega, x)} \circ \dots \circ F_{(\omega, x)}(\xi)|_{\Theta_n(\omega, x)} \\ &= |f_{\Theta_{n-1}(\omega, x)} \circ \dots \circ f_{(\omega, x)}(\xi)|_{\Theta_n(\omega, x)} \\ &= |\text{Exp}_{\varphi(n, \omega, x)}^{-1}(\varphi(n, \omega, z))|_{\Theta_n(\omega, x)} \end{aligned}$$

zu ii) Wegen $\exp(\mu n) C(\omega, x, \varepsilon) \leq \exp(-\varepsilon n) C(\omega, x, \varepsilon) \leq C(\Theta_n(\omega, x), \varepsilon)$ gilt zunächst:

$$|\text{Exp}_{\varphi(n, \omega, x)}^{-1} \varphi(n, \omega, z)|_{\Theta_n(\omega, x)} = |F_{\Theta_{n-1}(\omega, x)} \circ \dots \circ F_{(\omega, x)}(\xi)|_{\Theta_n(\omega, x)}$$

Wir müssen zeigen: $\xi \in \text{Graph } \mathcal{G}(\omega, x)$. Dies ist offenbar dann der Fall, wenn gilt: $\delta_{(\omega, x)}^\xi \in \text{Graph } \mathcal{G}$. Nun gilt aber:

$$\begin{aligned}
|\exp(-\mu n) \mathcal{F}^n \delta_{(\omega, x)}^\xi| &= \exp(-\mu n) |F_{\Theta_{n-1}(\omega, x)} \circ \dots \circ F_{(\omega, x)}(\xi)|_{\Theta_n(\omega, x)} \\
&= \exp(-\mu n) |\text{Exp}_{\varphi(n, \omega, x)}^{-1} \varphi(n, \omega, z)|_{\Theta_n(\omega, x)} \\
&\leq C(\omega, x, \varepsilon) < \infty
\end{aligned}$$

und die Behauptung folgt aus der dynamischen Charakterisierung von Graph G entsprechend Theorem B.

Die obigen Implikationen sollen nunmehr auf die ursprüngliche Riemann-Metrik umgerechnet werden. Dies liefert dann die gesuchten Funktionen. Es gilt

$$\begin{aligned}
\text{iii) } z \in W_\mu^s(\omega, x) \\
\Rightarrow d(\varphi(n, \omega, x), \varphi(n, \omega, z)) &\leq r B(\omega, x, \varepsilon) (\exp(\lambda_m + a) + \zeta)^n d(x, z) \\
\text{iv) } z \in W_\mu^s(\omega, x) \\
\Leftarrow d(\varphi(n, \omega, x), \varphi(n, \omega, z)) &\leq C(\omega, x, \varepsilon) B(\omega, x, \varepsilon)^{-1} \exp((\mu - \varepsilon)n)
\end{aligned}$$

zu iii) Sei $z \in W_\mu^s(\omega, x)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
&r B(\omega, x, \varepsilon) (\exp(\lambda_m + a) + \zeta)^n d(x, z) \\
&= r B(\omega, x, \varepsilon) (\exp(\lambda_m + a) + \zeta)^n \|\text{Exp}_x^{-1}(z)\| \\
&\geq r (\exp(\lambda_m + a) + \zeta)^n \|\text{Exp}_x^{-1}(z)\|_{(\omega, x)} && \text{Lemma 2.1.2} \\
&\geq r \|\text{Exp}_{\varphi(n, \omega, x)}^{-1} \varphi(n, \omega, z)\|_{\Theta_n(\omega, x)} && \text{wegen i)} \\
&\geq \|\text{Exp}_{\varphi(n, \omega, x)}^{-1} \varphi(n, \omega, z)\| && \text{Lemma 2.1.2} \\
&= d(\varphi(n, \omega, x), \varphi(n, \omega, z))
\end{aligned}$$

zu iv) Es gilt

$$\begin{aligned}
& |\text{Exp}_{\varphi(n,\omega,x)}^{-1} \varphi(n,\omega,z)|_{\Theta_n(\omega,x)} \\
& \leq B(\Theta_n(\omega,x), \varepsilon) \|\text{Exp}_{\varphi(n,\omega,x)}^{-1} \varphi(n,\omega,z)\| \quad \text{Lemma 2.1.2} \\
& \leq B(\omega,x,\varepsilon) \exp(\varepsilon n) d(\varphi(n,\omega,x), \varphi(n,\omega,z)) \quad \text{Lemma 2.1.2} \\
& \leq B(\omega,x,\varepsilon) \exp(\varepsilon n) C(\omega,x,\varepsilon) B(\omega,x,\varepsilon)^{-1} \exp((\mu - \varepsilon)n) \\
& \leq \exp(\mu n) C(\omega,x,\varepsilon)
\end{aligned}$$

und wir sind fertig wegen ii).

Nunmehr können die Funktionen β und γ explizit angegeben werden. Wir setzen

$$\beta(\omega,x) := \frac{C(\omega,x,\varepsilon)}{r B(\omega,x,\varepsilon)^2} \quad \gamma(\omega,x) := \frac{C(\omega,x,\varepsilon)}{B(\omega,x,\varepsilon)}$$

Beachtet man, daß aus der Ungleichung $\exp(\lambda_m + a) + \zeta < \exp(\mu)$ für hinreichend kleine $\varepsilon > 0$ auch die Ungleichung $\exp(\lambda_m + a) + \zeta \leq \exp(\mu - \varepsilon)$ folgt, so gilt zunächst wegen iii):

$$\begin{aligned}
z \in W_\mu^s(\omega,x) \cap B(x, \beta(\omega,x)) & \Rightarrow d(\varphi(n,\omega,x), \varphi(n,\omega,z)) \\
& \leq r B(\omega,x,\varepsilon) (\exp(\lambda_m + a) + \zeta)^n d(x,z) \\
& \leq r B(\omega,x,\varepsilon) \exp((\mu - \varepsilon)n) \frac{C(\omega,x,\varepsilon)}{r B(\omega,x,\varepsilon)^2} \\
& \leq \frac{C(\omega,x,\varepsilon)}{B(\omega,x,\varepsilon)} \exp((\mu - \varepsilon)n) \\
& = \gamma(\omega,x) \exp((\mu - \varepsilon)n)
\end{aligned}$$

Die zweite Implikation ist unmittelbar klar wegen iv). Das Korollar ist bewiesen. $\square$

Bemerkung:

Man mag sich an dieser Stelle fragen, wieso hier nicht von vornherein versucht wurde, mit ähnlichen Methoden wie Carverhill zu arbeiten. Wir wollen die Gründe kurz erläutern. Die Arbeit von Carverhill beruht primär auf Ergebnissen von Ruelle. Dieser zeigt für deterministische Systeme die Existenz streng stabiler Mannigfaltigkeiten. Hierzu wird zunächst aus dem multiplikativen Ergodensatz ein sogenannter "nichtlinearer Ergodensatz" hergeleitet und dann die Existenz stabiler Mannigfaltigkeiten mittels dieses Satzes

gezeigt. Nun läßt sich aber der nichtlineare Ergodensatz nur für $\mu < 0$ beweisen. Diese Schwierigkeit taucht bei unserem Vorgehen nicht auf. Der Hintergrund hierfür ist eine etwas verschiedene Zielrichtung. Ruelle ist primär an der Struktur der Menge der Punkte, die eine dynamische Charakterisierung entsprechend Korollar 2.1.5 besitzen, interessiert, da diese so etwas wie bedingte Stabilität des Orbits bewirken. Wir hingegen haben uns ganz allgemein nach nichtlinearen Analoga der Oseledec-Räume gefragt, ohne uns zunächst um die Dynamik der Punkte auf den gefundenen Mannigfaltigkeiten zu kümmern. Es stellt sich dann erst hinterher heraus, daß für $\mu < 0$ die invarianten Mannigfaltigkeiten eine dynamische Charakterisierung besitzen.

Wir hatten die Mannigfaltigkeiten $W_\mu^s(\omega, x)$ als nichtlineare Analoga der Räume $V_\mu^s(\omega, x)$ interpretiert. Die V_μ^s bilden nun eine aufsteigende Folge (Oseledec-Fahne), d.h. es gilt für $\mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_r$ disjunkt vom Spektrum

$$V_{\mu_1}^s(\omega, x) \subset V_{\mu_2}^s(\omega, x) \subset \dots \subset V_{\mu_r}^s(\omega, x)$$

Vernünftigerweise sollten dann unsere $W_\mu^s(\omega, x)$ dasselbe Verhalten zeigen. Dies ist auch tatsächlich der Fall, wie das folgende Korollar zeigt:

Korollar 2.1.6 (Filtrationssatz)

Seien $\mu_1, \dots, \mu_{r-1}$ so gewählt, daß die Bedingungen

$$\lambda_1 + a < \mu_1 < \lambda_2 - a < \lambda_2 + a < \mu_2 < \dots < \mu_{r-1} < \lambda_r - a$$

erfüllt sind. Dann gilt

$$W_{\mu_1}^s(\omega, x) \subset W_{\mu_2}^s(\omega, x) \subset \dots \subset W_{\mu_{r-1}}^s(\omega, x)$$

Beweis:

Hierzu braucht man nur auf das Konstruktionsprinzip der $W_{\mu_i}^s(\omega, x)$ zurückzugehen. Offenbar reicht es zu zeigen, daß die Funktion $\mathcal{F}$ so gewählt werden kann, daß die Voraussetzungen der Theoreme B und C "simultan" für alle $\mu_i, i = 1, \dots, r-1$ erfüllt sind. Dies hätte wegen $\mu_i < \mu_j, i < j$, sofort die Relation

$$W^{s, \mu_i} \subset W^{s, \mu_j}$$

zur Folge, und nach Konstruktion würde dies dann auch für die $W_{\mu_i}^s(\omega, x)$ gelten.

Die von uns gewählte Lyapunov-Metrik ist jedoch von vornherein so gewählt, daß sie einen Einschnitt an beliebiger Stelle im Spektrum erlaubt, das heißt für alle μ_i , $i = 1, \dots, r-1$ gilt stets die Aussage (β) im Beweis von Theorem 2.1.1:

$$|T|_{B_{\mu_i}^s}| < \exp \mu_i < |T^{-1}|_{B_{\mu_i}^s}|^{-1}$$

Die in Theorem B vorausgesetzte Hyperbolizitätsbedingung an T ist also für alle μ_i erfüllt. Der Forderung nach hinreichend kleiner Lipschitz-Konstanten für $\mathcal{F} - T$ kann nun stets durch geeignete Wahl von ζ entsprechend Lemma 2.1.3 Genüge getan werden. Damit sind also die Voraussetzungen der Theoreme B und C tatsächlich simultan erfüllbar und das Korollar ist bewiesen. $\square$

Bemerkung:

Die Oseledec-Fahnen haben offensichtlich die Eigenschaft, daß für $\lambda_i \leq \mu_1 \leq \mu_2 \leq \lambda_{i+1}$ stets gilt: $V_{\mu_1}^s(\omega, x) = V_{\mu_2}^s(\omega, x)$. In etwas schwächerer Form zeigen die Mannigfaltigkeiten $W_{\mu}^s(\omega, x)$ ebenfalls dieses Verhalten. Hat man einen Parameter μ_1 aus dem Intervall $(\lambda_i + a, \lambda_{i+1} - a)$ und die zugehörige Lipschitz-Konstante ζ fest gewählt, so darf offenbar μ_2 ein Intervall $(\log(e^{\lambda_i + a} + \zeta), \log(e^{\lambda_{i+1} - a} - \zeta))$ variieren, ohne daß Theorem B für solche Parameterwerte seine Gültigkeit verliert. Sei nun zum Beispiel $\mu_1 < \mu_2$. Dann folgt sofort wieder $W^s, \mu_1 \subset W^s, \mu_2$. Da aber sowohl W^s, μ_1 also auch W^s, μ_2 Graphen über denselben Räumen sind, hat diese Relation sofort die Gleichheit zur Folge. Nach Konstruktion folgt damit $W_{\mu_1}^s(\omega, x) = W_{\mu_2}^s(\omega, x)$.

Abschließend soll nunmehr die Frage der Meßbarkeit der $W_{\mu}^s(\omega, x)$ geklärt, d.h. Teil iii) von Theorem 2.1.1 bewiesen werden. Nach Theorem A hängen die Oseledec-Räume bzw. Fahnen meßbar von ω und x ab, und zwar in dem Sinne, daß die Funktionen $(\omega, x) \mapsto V_{\mu}^s(\omega, x)$ meßbare Abbildungen in die entsprechenden Graßmann-Bündel über M sind. Die invarianten Mannigfaltigkeiten $W_{\mu}^s(\omega, x)$ erfüllen nun eine analoge Eigenschaft. Es gilt:

Korollar 2.1.7 :

Es bezeichne $C^0(V_{\mu}^s, V_{\mu}^u)$ das meßbare Bündel über Λ , dessen Faser über (ω, x) aus den stetigen Abbildungen von $V_{\mu}^s(\omega, x)$ nach $V_{\mu}^u(\omega, x)$, versehen mit der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf kompakten Mengen, besteht. Dann ist die Abbildung

$$\begin{aligned} \Lambda &\longrightarrow C^0(V_{\mu}^s, V_{\mu}^u) \\ (\omega, x) &\longmapsto \mathcal{G}(\omega, x) \end{aligned}$$

ein meßbarer Schnitt dieses Bündels.

Beweis:

Wir zeigen zunächst: Die Menge

$$BM := \{S \in B \mid S \text{ ist } \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(M), \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(TM) - \text{meßbar}\}$$

bildet einen abgeschlossenen Unterraum von B . (Hierbei bezeichnet $\mathcal{B}(M)$ die Borel- σ -Algebra von M , entsprechend für TM) Dies kann man wie folgt einsehen:

Zunächst ist ein Schnitt $\mathcal{S}$ offenbar genau dann meßbar, wenn $\sigma : \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(M), \mathcal{B}(TM))$ - meßbar ist. Sei nun $\{\mathcal{S}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge meßbarer Schnitte mit $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{S}_n = \mathcal{S}$. Dann gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\mathcal{S}_n - \mathcal{S}| = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{(\omega, x)} |\sigma_n(\omega, x) - \sigma(\omega, x)|_{(\omega, x)} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} |\sigma_n(\omega, x) - \sigma(\omega, x)|_{(\omega, x)} = 0 \quad \text{für alle } (\omega, x) \in \Lambda$$

$\{\sigma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert also punktweise bzgl. der Lyapunov-Metrik gegen σ . Dann konvergiert $\{\sigma_n\}$ aber auch in der ursprünglichen Riemann-Metrik. Der punktweise Limes einer Folge meßbarer Funktionen mit Werten in einem vollständigen metrischen Raum ist aber wieder meßbar, und wir sind fertig.

Analog zu B besitzt BM eine Zerlegung

$$\begin{aligned} BM &:= BM_\mu^s \oplus BM_\mu^u \text{ mit} \\ BM_\mu^s &:= \{S \in BM \mid \sigma(\omega, x) \in V_\mu^s(\omega, x)\} \\ BM_\mu^u &:= \{S \in BM \mid \sigma(\omega, x) \in V_\mu^u(\omega, x)\} \end{aligned}$$

Die gesamte Konstruktion von Theorem 2.1.1. läßt sich damit auch für BM durchführen. Dies ergibt:

Die Menge

$$W_m^{s, \mu} := \{S \in BM \mid \sup_{n \geq 0} |\exp(-\mu n) \mathcal{F}^n S| < \infty\}$$

ist Graph einer Lipschitz-stetigen Abbildung $\mathcal{G}_m : BM_\mu^s \rightarrow BM_\mu^u$.

Nach Konstruktion gilt dann:

$$W_m^{s, \mu} \subset W^{s, \mu} \quad \text{also} \quad \text{Graph } \mathcal{G}_m \subset \text{Graph } \mathcal{G}$$

Man kann sich an dieser Stelle fragen, wieso der Beweis von 2.1.1 nicht von vornherein mit dem Raum BM durchgeführt wurde. Der Grund liegt darin, daß es aus technischen Gründen günstig ist, intensiv Gebrauch von den speziellen Schnitten $\mathcal{S} = \delta_{(\omega, x)}^\xi$ zu machen. Diese müssen jedoch für einen beliebigen Wahrscheinlichkeitsraum Ω keineswegs meßbar sein. Dies setzt die Meßbarkeit einelementiger Mengen voraus, und diese Voraussetzung wollten wir uns ersparen. Man sieht nun aber an der Konstruktion, daß es für die uns eigentlich interessierenden Objekte, nämlich die Funktionen $\mathcal{G}(\omega, x)$, völlig unerheblich ist, ob sie über $W^{s, \mu}$ oder $W_m^{s, \mu}$ gewonnen werden. Man hat sich lediglich davon zu überzeugen, daß es "genügend" meßbare Schnitte gibt, das heißt, daß zu $\xi \in V_\mu^s(\omega_o, x_o)$ stets ein $\mathcal{S} \in BM$ existiert mit $\sigma(\omega_o, x_o) = \xi$. Dies kann man wie folgt einsehen: Zunächst existiert eine Borel-meßbare Trivialisierung $Tr : TM \rightarrow M \times \mathbb{R}^d$. Sei nun $Tr(\xi) = (x_o, y_o)$. Setze

$$\begin{aligned} s : \Omega \times M &\rightarrow M \times \mathbb{R}^d \\ (\omega, x) &\mapsto (x, y_o) \end{aligned}$$

Dann ist $\tilde{\mathcal{S}}(\omega, x) = (\omega, Tr^{-1} \circ s(\omega, x))$ offenbar ein meßbarer Schnitt mit $\tilde{\sigma}(\omega_o, x_o) = \xi$. Damit leistet

$$\mathcal{S} = \begin{cases} (\omega, \tilde{\sigma}(\omega, x)) & \text{falls } |\tilde{\sigma}(\omega, x)|_{(\omega, x)} \leq |\xi|_{(\omega_o, x_o)} \\ (\omega, 0) & \text{sonst} \end{cases}$$

das Gewünschte.

Wir wollen nun den folgenden Satz verwenden:

Theorem D:

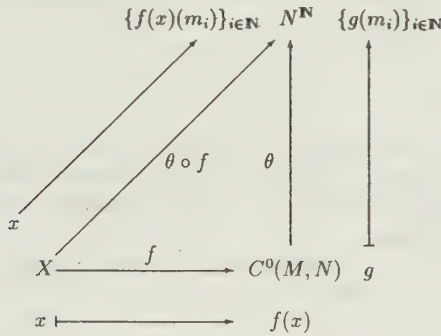
Sei $(X, \mathcal{F})$ ein Meßraum, M, N C^∞ -Mannigfaltigkeiten (separabel, metrisierbar). Es bezeichne $C^0(M, N)$ die Menge der stetigen Abbildungen von M nach N , versehen mit der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf kompakten Mengen. Es bezeichne weiter $Map(X, M), Map(X, N)$ die Menge aller Abbildungen von X nach M bzw. N . Sei nun $f : X \rightarrow C^0(M, N)$ eine Abbildung. Setze

$$\begin{aligned} J : Map(X, M) &\rightarrow Map(X, N) \\ J(\theta)(x) &= f(x)\theta(x) \end{aligned}$$

Bildet dann J meßbare Funktionen auf meßbare Funktionen ab, so ist f meßbar.

Für den Fall, daß X ein polnischer Raum mit Borel- σ -Algebra ist, findet sich ein Beweis dieses Satzes bei Fathi, Herman und Yoccoz [9, Appendix C]. Man kann sich aber leicht davon überzeugen, daß diese topologische Voraussetzung nicht notwendig ist.

Um dies zu erläutern, wollen wir den Beweis kurz skizzieren. Man betrachte zunächst das folgende kommutative Diagramm:



wobei $\{m_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ eine abzählbare, dichte Teilmenge von M ist. Mittels eines tiefliegenden maßtheoretischen Satzes (siehe z.B. Cohn [6, Theorem 8.3.7]) kann man zeigen, daß θ einen meßbaren Isomorphismus $C^0(M, N) \cong \theta(C^0(M, N)) \subset N^{\mathbb{N}}$ induziert. Hieraus folgt aber: f ist genau dann meßbar, wenn die Abbildungen

$$\begin{aligned}
 X &\rightarrow N \\
 x &\mapsto f(x)(m)
 \end{aligned}$$

meßbar sind für alle $m \in M$.

Wenn nun aber J meßbare Funktionen auf meßbare Funktionen abbildet, so folgt mit der konstanten Abbildung $\overline{m} : X \rightarrow m$:

Die Abbildungen

$$J(\overline{m}(x)) = f(x)(\overline{m}(x)) = f(x)(m)$$

sind meßbar für alle $m \in M$ und wir sind fertig aufgrund der obigen Überlegungen.

Setzen wir nun

$$\begin{aligned}
 V^s &:= \bigcup_{(\omega, x) \in \Lambda} (\{\omega\} \times V_\mu^s(\omega, x)) \subset \Omega \times TM \\
 V^u &:= \bigcup_{(\omega, x) \in \Lambda} (\{\omega\} \times V_\mu^u(\omega, x)) \subset \Omega \times TM
 \end{aligned}$$

so impliziert die Meßbarkeit der Oseledec-Fahnen die Existenz meßbarer Trivialisierungen der Bündel (Λ, V^s, π) und (Λ, V^u, π) , das heißt es existieren bimeßbare Abbildungen

$$\begin{aligned} T^s : V^s &\rightarrow \Lambda \times \mathbb{R}^k \\ T^u : V^u &\rightarrow \Lambda \times \mathbb{R}^{d-k} \end{aligned}$$

mit $k = \dim V_\mu^s(\omega, x)$.

Aufgrund dieser Trivialisierungen kann daher die Menge BM_μ^s in natürlicher Weise mit der Menge aller meßbaren Abbildungen von Λ nach $\mathbb{R}^k$ identifiziert werden, welche wir mit $M(\Lambda, \mathbb{R}^k)$ bezeichnen. Analoges gilt für BM_μ^u . Mittels dieser Identifizierungen induziert dann $\mathcal{G}_m$ eine Abbildung

$$\begin{aligned} G : \quad \Lambda &\rightarrow C^0(\mathbb{R}^k, \mathbb{R}^{d-k}) \\ (\omega, x) &\mapsto \mathcal{G}(\omega, x) \end{aligned}$$

Wir wissen aber, daß die Abbildung

$$\begin{aligned} J : M(\Lambda, \mathbb{R}^k) &\rightarrow M(\Lambda, \mathbb{R}^{d-k}) \\ J(\theta)(\omega, x) &= \mathcal{G}(\omega, x)(\theta(\omega, x)) \end{aligned}$$

wohldefiniert ist, das heißt meßbare Funktionen auf meßbare Funktionen abbildet. Mit Theorem D folgt dann aber: Die Abbildung $(\omega, x) \mapsto \mathcal{G}(\omega, x)$ ist meßbar bezüglich der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf kompakten Mengen. Das Korollar ist bewiesen. $\square$

2.2 Instabile- und Oseledec-Mannigfaltigkeiten

In Abschnitt 2.1 wurde die Existenz invarianter Mannigfaltigkeiten tangential zu den Räumen $V_\mu^s(\omega, x) := \oplus_{\lambda_i < \mu} E_i(\omega, x)$ gezeigt. Unter einer instabilen Mannigfaltigkeit soll nun analog eine Familie von C^1 -Untermannigfaltigkeiten tangential an die Räume $V_\mu^u(\omega, x) := \oplus_{\lambda_i > \mu} E_i(\omega, x)$ verstanden werden. Im Prinzip lassen sich solche Mannigfaltigkeiten einfach durch Zeitumkehr gewinnen, das heißt indem man die gesamte Konstruktion von Theorem 2.1.1 für $\varphi(-1, \omega, x)$ durchführt. Hierbei würde man jedoch zum Beispiel eine andere Funktion $C(\omega, x, \varepsilon)$ erhalten, was ein völlig anderes "Universum" zur Folge hätte. Unser Ziel ist es aber, zumal im Hinblick auf spätere Untersuchungen (Oseledec-Mannigfaltigkeiten usw.) alle eingehenden Funktionen und Parameter ein für alle mal so zu wählen, daß die Voraussetzungen für alle vorkommenden Theoreme und Korollare simultan erfüllt sind. Deshalb werden wir die Existenz instabiler Mannigfaltigkeiten direkt mit dem in 2.1.1 konstruierten Universum, d.h. mittels der dort etablierten Funktionen $\mathcal{F}, \mathcal{T}, C$ usw. zeigen. Es gilt:

Theorem 2.2.1 (*Lokale instabile Mannigfaltigkeiten*):

Es seien die Voraussetzungen von Theorem 2.1.1 erfüllt. Dann existiert eine Menge $\Lambda \subseteq \Gamma$ mit $\nu(\Lambda) = 1$, eine meßbare Funktion $\delta : \Lambda \times \mathbb{N} \rightarrow]0, \infty[$ und eine Familie $\{W_\mu^u(\omega, x) | (\omega, x) \in \Lambda\}$ von C^1 -Untermannigfaltigkeiten derart, daß gilt:

- i) $\varphi(-m, \omega, \cdot)(W_\mu^u(\omega, x) \cap B(x, \delta(\omega, x, n))) \subset W_\mu^u(\Theta_{-m}(\omega, x))$ für $m \leq n$
- ii) $x \in W_\mu^u(\omega, x)$ und $T_x W_\mu^s(\omega, x) = V_\mu^u(\omega, x)$

Beweis:

Wir wollen analog zum Beweis von Theorem 2.1.1 vorgehen und wieder die Theoreme B und C anwenden, diesmal jedoch für $\mathcal{F}^{-1}$ und $\mathcal{T}^{-1}$.

Man kann leicht folgenden Sachverhalt zeigen:

Seien f und g Abbildungen zwischen topologischen Unterräumen zweier Banachräume. Ist dann g injektiv und $\text{Lip}(g - f) < (\text{Lip } g^{-1})^{-1}$, so ist auch f injektiv und es gilt: $\text{Lip } f^{-1} \leq [(\text{Lip } g^{-1})^{-1} - \text{Lip}(g - f)]^{-1}$

Mit $g \hat{=} \mathcal{T}, f \hat{=} \mathcal{F}$, folgt hieraus zunächst:

$\mathcal{F}$ ist injektiv und es gilt:

$$\text{Lip } \mathcal{F}^{-1} \leq [|\mathcal{T}^{-1}|^{-1} - \text{Lip}(\mathcal{T} - \mathcal{F})]^{-1}$$

Aus der Lipschitz-Nähe von $\mathcal{F}$ zu $\mathcal{T}$ folgt leicht die Surjektivität von $\mathcal{F}$ (Zur Erläuterung betrachte man etwa die Überlegungen im Beweis von Lemma 3.2.4). Daher ist $\mathcal{F}^{-1}$ wohldefiniert und es gilt

$$(\mathcal{F}^{-1} - \mathcal{T}^{-1}) = \mathcal{T}^{-1} \circ (\mathcal{T} - \mathcal{F}) \circ \mathcal{F}^{-1},$$

also

$$\begin{aligned} \text{Lip}(\mathcal{F}^{-1} - \mathcal{T}^{-1}) &\leq |\mathcal{T}^{-1}| \text{Lip}(\mathcal{T} - \mathcal{F}) \text{Lip} \mathcal{F}^{-1} \\ &\leq |\mathcal{T}^{-1}| \text{Lip}(\mathcal{T} - \mathcal{F}) [|\mathcal{T}^{-1}|^{-1} - \text{Lip}(\mathcal{T} - \mathcal{F})]^{-1} \end{aligned}$$

Wählt man daher ζ entsprechend Lemma 2.1.3 hinreichend klein, so sind die Voraussetzungen von Theorem B offenbar erfüllt. Dies hat die Existenz von Abbildungen $\mathcal{H}(\omega, x) : V_\mu^u(\omega, x) \rightarrow V_\mu^s(\omega, x)$ entsprechend Lemma 2.1.4 zur Folge, welche die instabilen Mannigfaltigkeiten bestimmen. Damit sind wir schon fast fertig.

Nach Konstruktion gilt:

$$\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{S})(\omega, x) = (\omega, F_{(\omega, x)}^{-1} \sigma(\Theta(\omega, x)))$$

Wenn wir daher zeigen können:

Für alle $\varepsilon > 0$ existiert eine Funktion $L(\omega, x, \varepsilon)$ mit

$$F_{\Theta^{-1}(\omega, x)}^{-1}(\xi) = f_{\Theta^{-1}(\omega, x)}^{-1}(\xi) \quad \text{für } |\xi|_{(\omega, x)} \leq L(\omega, x, \varepsilon)$$

sowie

$$L(\Theta_n(\omega, x), \varepsilon) \geq L(\omega, x) \exp(-\varepsilon|n|), \quad n \in \mathbb{Z}$$

und sodann setzen:

$$W_\mu^u(\omega, x) := \text{Exp}_x\{\xi \in \text{Graph } \mathcal{H}(\omega, x) \mid |\xi|_{(\omega, x)} \leq L(\omega, x, \varepsilon)\}$$

so läßt sich die Funktion $\delta(\omega, x, n)$ ähnlich wie die Funktion α im Beweis von Theorem 2.1.1 konstruieren.

Die gesuchte Funktion $L(\omega, x, \varepsilon)$ läßt sich nun aus der in Lemma 2.1.3. etablierten Abbildung $C(\omega, x, \varepsilon)$ gewinnen.

Nach Konstruktion gilt:

$$\begin{aligned} |F_{\Theta_{-1}(\omega, x)}^{-1}(\xi)|_{\Theta_{-1}(\omega, x)} &\leq C(\Theta_{-1}(\omega, x), \varepsilon) \\ \Rightarrow F_{\Theta_{-1}(\omega, x)}^{-1}(\xi) &= f_{\Theta_{-1}(\omega, x)}^{-1}(\xi) \end{aligned}$$

Mittels analoger Überlegungen wie oben folgt aber:

$$\begin{aligned} |F_{\Theta_{-1}(\omega, x)}^{-1}(\xi)|_{\Theta_{-1}(\omega, x)} &\leq \text{Lip} F_{\Theta_{-1}(\omega, x)}^{-1} |\xi|_{(\omega, x)} \\ &\leq [|T\varphi(1, \Theta_{-1}(\omega, x))^{-1}|^{-1} - \text{Lip}(F_{\Theta_{-1}(\omega, x)} - T\varphi(1, \Theta_{-1}(\omega, x)))]^{-1} |\xi|_{(\omega, x)} \\ &\leq [\exp(\lambda_1 + a) - \zeta]^{-1} |\xi|_{(\omega, x)} \end{aligned}$$

Setzen wir also

$$L(\omega, x, \varepsilon) := C(\omega, x, \varepsilon) \exp(-\varepsilon) (\exp(\lambda_1 + a) - \zeta)$$

so folgt für $|\xi|_{(\omega, x)} \leq L(\omega, x, \varepsilon)$:

$$\begin{aligned} |F_{\Theta_{-1}(\omega, x)}^{-1}(\xi)|_{\Theta_{-1}(\omega, x)} &\leq [\exp(\lambda_1 + a) - \zeta]^{-1} |\xi|_{(\omega, x)} \\ &\leq C(\omega, x, \varepsilon) \exp(-\varepsilon) \\ &\leq C(\Theta_{-1}(\omega, x), \varepsilon) \end{aligned}$$

und wir sind fertig.

Die Differenzierbarkeit der $W_\mu^u(\omega, x)$ ergibt sich analog zu Theorem 2.1.1, da die Lipschitz-Nähe von $\mathcal{F}$ zu T die Differenzierbarkeit von $\mathcal{F}^{-1}$ aufgrund des Umkehrsatzes zur Folge hat. Das Theorem ist bewiesen. $\square$

Bemerkung:

Zu den Korollaren 2.1.5, 2.1.6 und 2.1.7 analoge Resultate können mit denselben Methoden auch für die instabilen Mannigfaltigkeiten gewonnen werden.

Wir haben bislang die Existenz stabiler und instabiler Mannigfaltigkeiten zu geeigneten Parametern $\mu \in \mathbb{R}$ gezeigt. Da wir aber das Spektrum an einer relativ beliebigen Stelle auftrennen konnten, liegt die Vermutung nahe, daß sich durch "Schneiden" von stabilen und instabilen Mannigfaltigkeiten zu geeigneten Parametern invariante Mannigfaltigkeiten tangential an die einzelnen Oseledec-Räume konstruieren lassen. Das folgende zentrale Theorem dieses Abschnitts besagt nun, daß dieses tatsächlich der Fall ist; die erzeugten invarianten Mannigfaltigkeiten werden wir als "Oseledec-Mannigfaltigkeiten" bezeichnen.

Theorem 2.2.2 (Oseledec-Mannigfaltigkeiten):

Es seien die Voraussetzungen von Theorem 2.1.1 erfüllt und $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ disjunkt zu allen Intervallen $[\lambda_i - a, \lambda_i + a]$ gewählt. Wir setzen:

$$V_{\mu_1}^s := \bigoplus_{\lambda_i < \mu_1} E_i(\omega, x) \quad V_{\mu_1, \mu_2}^c := \bigoplus_{\mu_1 < \lambda_i < \mu_2} E_i(\omega, x) \quad V_{\mu_2}^u := \bigoplus_{\lambda_i > \mu_2} E_i(\omega, x)$$

Dann existiert eine Menge $\Lambda \subseteq \Gamma, \nu(\Lambda) = 1$, eine meßbare Funktion $\varrho : \Lambda \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow]0, \infty[$ und eine Familie $\{W_{\mu_1, \mu_2}^c(\omega, x) \mid (\omega, x) \in \Lambda\}$ von C^1 -Untermannigfaltigkeiten derart, daß gilt:

- i) $\varphi(n, \omega, \cdot)(W_{\mu_1, \mu_2}^c(\omega, x) \cap B(x, \varrho(\omega, x, N, M))) \subset W_{\mu_1, \mu_2}^c(\Theta_n(\omega, x)), \quad n \leq N$
 $\varphi(-m, \omega, \cdot)(W_{\mu_1, \mu_2}^c(\omega, x) \cap B(x, \varrho(\omega, x, N, M))) \subset W_{\mu_1, \mu_2}^c(\Theta_{-m}(\omega, x)), \quad m \leq M$
- ii) $x \in W_{\mu_1, \mu_2}^c(\omega, x)$ und $T_x W_{\mu_1, \mu_2}^c(\omega, x) = V_{\mu_1, \mu_2}^c(\omega, x)$

Beweis:

Aus dem den Ergebnissen von Abschnitt 2.1. zugrundeliegenden Konstruktionsprinzip wird klar, wie man nun am einfachsten vorgehen kann. Man reduziert das Problem wieder auf die Aufgabe, eine geeignete invariante Mannigfaltigkeit für einen Diffeomorphismus eines Banachraumes mit einem Fixpunkt zu finden. Die Konstruktion im Beweis von Theorem 2.1.1. ist von vornherein so angelegt, daß sich diese Idee auch in diesem Fall realisieren läßt.

Wir setzen zunächst

$$B_{\mu_1}^s := \bigoplus_{\lambda_i < \mu_1} B_i \quad B_{\mu_1, \mu_2}^c := \bigoplus_{\mu_1 < \lambda_i < \mu_2} B_i \quad B_{\mu_2}^u := \bigoplus_{\mu_2 < \lambda_i} B_i$$

Mit $\lambda_m := \max_{\lambda_i < \mu_1} \{\lambda_i\}, \lambda_n := \max_{\lambda_i < \mu_2} \{\lambda_i\}$ folgt dann mittels Gleichung (1) (siehe Beweis von 2.1.1.):

$$\begin{aligned} |T|_{B_{\mu_1}^s} &\leq \exp(\lambda_m + a) < \exp \mu_1 < \exp(\lambda_{m+1} - a) \leq |T^{-1}|_{B_{\mu_1, \mu_2}^c}^{-1} \\ &\leq |T|_{B_{\mu_1, \mu_2}^c} \leq \exp(\lambda_n + a) < \exp \mu_2 < \exp(\lambda_{n+1} - a) \leq |T^{-1}|_{B_{\mu_2}^u}^{-1} \end{aligned}$$

Wir wollen den folgenden Satz benutzen (für weitere Erläuterungen siehe wieder Appendix):

Theorem E:

Sei T ein Isomorphismus eines Banachraumes E mit invarianten Unterräumen E_1, E_2, E_3 derart, daß gilt $E = E_1 \oplus E_2 \oplus E_3$. Setze $T_i = T|_{E_i}$. Es seien weiter die Ungleichungen

$$\|T_1\| < \|T_2^{-1}\|^{-1} \leq \|T_2\| < \|T_3\|^{-1}$$

erfüllt und $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$ so gewählt, daß gilt:

$$\|T_3^{-1}\|^{-1} > \kappa > \|T_2\| \quad \|T_1\|^{-1} > \lambda > \|T_2^{-1}\|$$

Sei weiter $f : E \rightarrow E$ eine globale Lipschitz-Abbildung mit $f(0) = 0$ und

$$\begin{aligned} \text{Lip}(f - T) &= k < \min(\|T_3^{-1}\|^{-1} - \kappa, \kappa - \|T_2\|) \\ \text{Lip}(f^{-1} - T^{-1}) &= \ell < \min(\|T_1\|^{-1} - \lambda, \lambda - \|T_2^{-1}\|) \end{aligned}$$

Dann ist die Menge

$$W^{\kappa, \lambda} := \{x \in E \mid \sup_{n \geq 0} \|\kappa^{-n} f^n(x)\| < \infty \wedge \sup_{n \geq 0} \|\lambda^{-n} f^{-n}(x)\| < \infty\}$$

der Graph einer Lipschitz-Abbildung $g : E_2 \rightarrow E_1 \oplus E_3$ mit $g(0) = 0$, $\text{Lip } g < 1$.

Ist weiterhin f eine C^1 -Abbildung und k, ℓ hinreichend klein, so ist g ebenfalls eine C^1 -Abbildung. Gilt außerdem $Df(0) = T$, so folgt $Dg(0) = 0$, d. h. g ist tangential an E_2 .

Wählt man ζ entsprechend Lemma 2.1.3. hinreichend klein, so sieht man daß mit

$$E \hat{=} B \quad E_1 \hat{=} B_{\mu_1}^s \quad E_2 \hat{=} B_{\mu_1, \mu_2}^c \quad E_3 \hat{=} B_{\mu_2}^u, \quad T \hat{=} \mathcal{T}, \quad f \hat{=} \mathcal{F} \quad \kappa \hat{=} \exp \mu_2 \quad \lambda \hat{=} \exp(-\mu_1)$$

die Voraussetzungen von Theorem E erfüllt sind, was wiederum entsprechend Lemma 2.1.4 die Existenz von Abbildungen

$$\mathcal{K}(\omega, x) : V_{\mu_1 \mu_2}^c(\omega, x) \longrightarrow V_{\mu_1}^s(\omega, x) \oplus V_{\mu_2}^u(\omega, x)$$

zur Folge hat, welche die gesuchte invariante Mannigfaltigkeiten bestimmen.

Setzen wir nun

$$W_{\mu_1\mu_2}^c := \text{Exp}_x\{\xi \in \text{Graph } \mathcal{K}(\omega, x) \mid |\xi|_{(\omega, x)} \leq \min(C(\omega, x, \varepsilon), L(\omega, x, \varepsilon))\}$$

mit $C(\omega, x, \varepsilon), L(\omega, x, \varepsilon)$ entsprechend Lemma 2.1.3 bzw. Theorem 2.2.1, so läßt sich die Funktion $\varrho(\omega, x, N, M)$ ähnlich wie im Beweis von Theorem 2.1.1. gewinnen, und die Tangentialität an $V_{\mu_1, \mu_2}^c(\omega, x)$ ist wieder eine direkte Konsequenz aus Theorem E. $\square$

Bemerkung:

Für den Fall eines verschwindenden Lyapunov-Exponenten erhalten wir für $\mu_1 = -b, \mu_2 = b$ sogenannte Zentrumsmannigfaltigkeiten. Dieser Fall ist von Boxler [2] genauer untersucht worden. Boxler studiert stoachstische Flüsse im $\mathbb{R}^n$ und konstruiert Zentrums-mannigfaltigkeiten entlang einzelner Trajektorien, und zwar mittels Transformation des Flusses in ein mitbewegtes Koordinatensystem. Wir wollen nun kurz die Beziehungen der Ergebnisse von Boxler zu den hier präsentierten Resultaten erläutern. Die Verhältnisse liegen hierbei nicht so einfach wie im Fall der Carverhillschen Ergebnisse (siehe Korollar 2.1.5), da die gewählten Ansätze recht verschieden sind. Ein wichtiger Unterschied in den Vorgehensweisen liegt zum Beispiel darin, daß Boxler von vornherein von einem globalen Ansatz mit globalen Beschränktheits- und Lipschitz-Bedingungen ausgeht und lokale Ergebnisse erst in einem zweiten Schritt aus den globalen Resultaten gewinnt. Dieses naheliegende Vorgehen ist im Falle kompakter Mannigfaltigkeiten nicht möglich, da man hier von vornherein aufgrund des beschränkten Injektivitätsradius zum Abschneiden und damit zum Lokalisieren gezwungen ist. Außerdem ist eine Transformation in ein mitbewegtes Koordinatensystem in unserem Fall schwierig, da sich verschiedene Tangentialräume im allgemeinen nicht kanonisch identifizieren lassen. Diese Transformation wird daher durch den (kartenunabhängigen) Lift mittels der Exponentialabbildung ersetzt. Man kann nun aber zeigen, daß sich mit unserem Ansatz eine zeitdiskrete Version der von Boxler [2] in Definition 7.1 sogenannten dynamisch charakterisierten globalen stochastischen Zentrumsmannigfaltigkeiten erzeugen läßt. Dies soll im folgenden kurz begründet werden.

Zunächst ist klar, daß sich unsere Theorie trotz fehlender Kompaktheit auch im $\mathbb{R}^n$ anwenden läßt. (Siehe hierzu die Bemerkung in Abschnitt 2.1.) Die Exponentialabbildung hat dann unendlichen Injektivitätsradius, denn sie reduziert sich auf eine affin-lineare Transformation. Präziser gilt:

$$\begin{aligned} f_{(\omega, x)}(\xi) &= \text{Exp}_{\varphi(1, \omega, x)}^{-1} \circ \varphi(1, \omega, \cdot) \circ \text{Exp}_x(\xi) \\ &= \varphi(1, \omega, x + \xi) - \varphi(1, \omega, x) \end{aligned}$$

Eine solche Abbildung wird bei Boxler mit $\tilde{\varphi}(1, \omega, x, \xi)$ bezeichnet; sie ist ein Kozykel bzgl. Θ_n (siehe Boxler [2, Satz 4.1]) und ist exakt die Abbildung, die auch die Transformation in ein mitbewegtes Koordinatensystem bewirkt.

Die Differenz

$$\tilde{\varphi}(1, \omega, x, \cdot) - D\phi\tilde{\varphi}(1, \omega, x, \cdot) = \varphi(1, \omega, x + \cdot) - \varphi(1, \omega, x) - T\varphi(1, \omega, x)$$

wird bei Boxler mit $\phi(1, \omega, \cdot)$ bezeichnet. An die Abbildung ϕ werden in der weiteren Entwicklung der Theorie Beschränktheitsbedingungen der Form:

$$\|D^j\phi(t, \omega, \cdot)\| \leq \varepsilon_j(\vartheta_t(\omega)), \text{ mit } \varepsilon_j(\omega) := \frac{\beta}{C(\omega)\|p(\omega)\|}\varepsilon_j \quad j = 0, \dots, k-1$$

gestellt. (Siehe Kapitel 5.) Hierbei sind die ε_j hinreichend klein zu wählende Konstanten und $C(\omega)$, $\|p(\omega)\|$ meßbare Funktionen, welche Eigenschaften von Lyapunov-Metriken bzw. von Projektionen auf Oseledec-Räume beschreiben. ($C(\omega)$ entspricht in gewissem Sinne unserer in Abschnitt 2.3 angegebenen Funktion $A(\omega, x, \varepsilon, \mu)$) Machen wir nun eine ähnliche Voraussetzung und fordern:

$$\|D\phi(1, \omega, \cdot)\| \leq \frac{\zeta}{rB(\Theta(\omega, x), \varepsilon)}$$

so ergibt sich:

$$\begin{aligned} & |f_{(\omega, x)}(\xi) - T\varphi(1, \omega, x)\xi - (f_{(\omega, x)}(\eta) - T\varphi(1, \omega, x)\eta)|_{\Theta(\omega, x)} \\ & \leq B(\Theta(\omega, x), \varepsilon)\|\phi(1, \omega, \xi) - \phi(1, \omega, \eta)\| \\ & \leq \frac{\zeta}{r}\|\xi - \eta\| \leq \zeta\|\xi - \eta\|_{(\omega, x)} \end{aligned}$$

Für ζ hinreichend klein sind daher die Voraussetzungen von 2.2.2 erfüllt und wir erhalten Zentrumsmannigfaltigkeiten als Graphen von Abbildungen

$$\mathcal{K}(\omega, x) : E_0(\omega, x) \longrightarrow V_{-b}^s(\omega, x) \oplus V_b^u(\omega, x)$$

Sei nun $\xi \in \text{Graph } \mathcal{K}(\omega, x)$. Dann gilt jedenfalls:

$$F_{\Theta_{n-1}(\omega, x)} \circ \dots \circ F_{(\omega, x)}(\xi) = f_{\Theta_{n-1}(\omega, x)} \circ \dots \circ f_{(\omega, x)}(\xi) = \tilde{\varphi}(n, \omega, x, \xi)$$

Damit ergibt sich (siehe auch Beweis von 2.1.1 und 2.1.5):

$$\begin{aligned} \|\tilde{\varphi}(n, \omega, x, \xi)\| & \leq r|\tilde{\varphi}(n, \omega, x, \xi)|_{\Theta_n(\omega, x)} \\ & \leq r|F_{\Theta_{n-1}(\omega, x)} \circ \dots \circ F_{(\omega, x)}(\xi)|_{\Theta_n(\omega, x)} \\ & \leq r(\text{Lip } \mathcal{F}|_{W^{\kappa, \lambda}})^n \|\xi\|_{(\omega, x)} \\ & \leq r(|\mathcal{T}|_{B_{-b}^s \oplus B_{-b, b}^c} + \zeta)^n \|\xi\|_{(\omega, x)} \\ & \leq rB(\omega, x, \varepsilon)(\exp(a) + \zeta)^n \|\xi\| \end{aligned}$$

Also:

$$\frac{1}{n} \log \|\tilde{\varphi}(\eta, \omega, x, \xi)\| \leq \log(\exp(a) + \zeta) + \frac{1}{n} \log(rB(\omega, x, \varepsilon)\|\xi\|)$$

Damit folgt:

$$\xi \in \text{Graph } \mathcal{K}((\omega, x) \Rightarrow \limsup \frac{1}{n} \log \|\tilde{\varphi}(\eta, \omega, x, \xi)\| \leq \log(\exp(a) + \zeta)$$

Mit $\delta := \log(\exp(a) + \zeta)$ erhalten wir also in Vorwärtszeitrichtung exakt die dynamische Charakterisierung, welche die von Boxler konstruierten dynamisch charakterisierten globalen stochastischen Zentrumsmannigfaltigkeiten nach Korollar 7.2 besitzen. Hierbei ist nicht von belang, daß Boxler ihre Bedingungen über die Normen der Projektionen $\tilde{\varphi}_{s,u}(t, \omega, x, \xi)$ formuliert. Es gilt nämlich zum Beispiel stets:

$$\|\xi_u\| \leq \frac{\|\xi\|}{(1 - \cos(\psi(\omega, x)))^{1/2}}$$

wobei $\psi(\omega, x)$ den Winkel zwischen den entsprechenden Oseledec-Räumen bezeichnet (siehe hierzu den Beweis von Lemma 3.2.5).

Dann gilt also:

$$\frac{1}{n} \log \|\tilde{\varphi}_u(n, \omega, x, \xi)\| \leq \frac{1}{n} \log \|\tilde{\varphi}(n, \omega, x, \xi)\| - \frac{1}{n} \log(2^{1/2} \sin(\frac{\psi(\Theta_n(\omega, x))}{2}))$$

und man kann zeigen, daß stets gelten muß (siehe Beweis von Lemma 3.2.2):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(2^{1/2} \sin(\frac{\psi(\Theta_n(\omega, x))}{2})) = 0$$

Die dynamische Charakterisierung in Rückwärtszeitrichtung erhält man analog.

2.3 Beweis der Lemmata 2.1.2 und 2.1.3

Beweis von Lemma 2.1.2:

Man kann zunächst zeigen:

Zu jedem $\mu \in \mathbb{R}$ disjunkt vom Lyapunov-Spektrum und hinreichen kleinem $\varepsilon > 0$ existiert auf Γ eine meßbare Funktion $A(\omega, x, \varepsilon, \mu)$ mit:

- i) $\forall \xi \in V_\mu^s(\omega, x), \forall n \geq 0; \|T\varphi(n, \omega, x)\xi\| \leq A(\omega, x, \varepsilon, \mu)\|\xi\| \exp(\mu n)$
 $\forall \xi \in V_\mu^u(\omega, x), \forall n \geq 0; \|T\varphi(-n, \omega, x)\xi\| \leq A(\omega, x, \varepsilon, \mu)\|\xi\| \exp(-\mu n)$
- ii) $\forall n \in \mathbb{Z}; A(\Theta_n(\omega, x), \varepsilon, \mu) \leq A(\omega, x, \varepsilon, \mu) \exp(\varepsilon|n|)$

Für deterministische Systeme findet sich eine analoge Aussage bei Fathi, Herman und Yoccoz [9, Proposition 1]. Es ist nun aber leicht zu sehen, daß der dort präsentierte Beweis auch für stochastische Systeme richtig bleibt, denn er beruht lediglich auf dem multiplikativen Ergodensatz und der Hadamardschen Ungleichung. (Man kann daher überall x durch (ω, x) und f^n durch $\Theta_n(\omega, x)$ ersetzen.)

Für $\xi \in E_i(\omega, x)$ ergibt sich damit:

$$\begin{aligned}
 \|\xi\|_{(\omega, x)} &= \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-(\lambda_i + a)n) \|T\varphi(n, \omega, x)\xi\| \\
 &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \exp((\lambda_i + a)n) \|T\varphi(-n, \omega, x)\xi\| \\
 &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-(\lambda_i + a)n) A(\omega, x, \varepsilon, \lambda_i + \frac{a}{2}) \|\xi\| \exp((\lambda_i + \frac{a}{2})n) \\
 &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \exp((\lambda_i + a)n) A(\omega, x, \varepsilon, \lambda_i - \frac{a}{2}) \|\xi\| \exp(-(\lambda_i - \frac{a}{2})n) \\
 &\leq \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-\frac{a}{2}n) A(\omega, x, \varepsilon, \lambda_i + \frac{a}{2}) \|\xi\| \\
 &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-\frac{a}{2}n) A(\omega, x, \varepsilon, \lambda_i - \frac{a}{2}) \|\xi\| \\
 &\leq \left(\frac{A(\omega, x, \varepsilon, \lambda_i + \frac{a}{2}) + A(\omega, x, \varepsilon, \lambda_i - \frac{a}{2})}{1 - \exp(-\frac{a}{2})} \right) \|\xi\|
 \end{aligned}$$

Für $\xi = \sum_{i=1}^r \xi_i$, $\xi_i \in E_i(\omega, x)$ ergibt sich daher:

$$\|\xi\|_{(\omega, x)} = \max_i \|\xi_i\|_{(\omega, x)} \leq \max_i \left(\frac{A(\omega, x, \varepsilon, \lambda_i + \frac{a}{2}) + A(\omega, x, \varepsilon, \lambda_i - \frac{a}{2})}{1 - \exp(-\frac{a}{2})} \right) \|\xi_i\|$$

Die rechte Seite kann weiter abgeschätzt werden, wenn wir das folgende Lemma benutzen, welches in Abschnitt 3 erneut benötigt und im Anschluß an den Beweis von 2.1.2 gezeigt wird:

Lemma 2.3.1 :

Zu jedem $\mu \in \mathbb{R}$ disjunkt vom Lyapunov-Spektrum und beliebigem $\varepsilon > 0$ existiert auf Γ eine meßbare Funktion $M(\omega, x, \varepsilon, \mu)$ mit

$$\begin{aligned} M(\omega, x, \varepsilon, \mu) &\leq \sin\left(\frac{\psi_\mu(\omega, x)}{2}\right) \\ M(\Theta_n(\omega, x)\varepsilon, \mu) &\geq M(\omega, x, \varepsilon, \mu) \exp(-\varepsilon|n|), \quad n \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

wobei $\psi_\mu(\omega, x)$ den Winkel zwischen $V_\mu^s(\omega, x)$ und $V_\mu^u(\omega, x)$ bezeichnet, welcher definiert ist durch:

$$\cos(\psi_\mu(\omega, x)) := \sup \left\{ \frac{|\langle \xi, \eta \rangle|}{\|\xi\| \|\eta\|} \mid \xi \in V_\mu^s(\omega, x), \eta \in V_\mu^u(\omega, x) \right\}$$

Es gilt nun stets (siehe hierzu den Beweis von Lemma 3.2.5)

$$\|\xi_i\| \leq \prod_{j=1}^{r-1} (1 - \cos(\psi_{\lambda_i+a}(\omega, x)))^{-1/2} \|\xi\|$$

also:

$$\begin{aligned} \|\xi_i\| &\leq 2^{\frac{r-1}{2}} \prod_{j=1}^{r-1} \sin\left(\frac{\psi_{\lambda_j+a}(\omega, x)}{2}\right)^{-1} \|\xi\| \\ &\leq 2^{\frac{r-1}{2}} \prod_{j=1}^{r-1} M(\omega, x, \varepsilon, \lambda_j + a)^{-1} \|\xi\| \end{aligned}$$

Damit leistet:

$$\begin{aligned} B(\omega, x, \varepsilon) &:= \frac{2^{\frac{r-1}{2}}}{(1 - \exp(-\frac{\varepsilon}{2}))} (\max_i (A(\omega, x, \frac{\varepsilon}{r}, \lambda_i + \frac{a}{2}) + A(\omega, x, \frac{\varepsilon}{r}, \lambda_i - \frac{a}{2})) \\ &\quad \prod_{j=1}^{r-1} M(\omega, x, \frac{\varepsilon}{r}, \lambda_j + a)^{-1} \end{aligned}$$

das Gewünschte, denn es gilt:

$$\begin{aligned}
B(\Theta_n(\omega, x), \varepsilon) &= \frac{2^{\frac{r-1}{2}}}{(1 - \exp(-\frac{a}{2}))} (\max_i (A(\Theta_n(\omega, x), \frac{\varepsilon}{r}, \lambda_i + \frac{a}{2}) + A(\Theta_n(\omega, x), \frac{\varepsilon}{r}, \lambda_i - \frac{a}{2}))) \\
&\quad \prod_{j=1}^{r-1} M(\Theta_n(\omega, x), \frac{\varepsilon}{r}, \lambda_j + a)^{-1} \\
&\leq \frac{2^{\frac{r-1}{2}}}{(1 - \exp(-\frac{a}{2}))} \max_i (A(\omega, x, \frac{\varepsilon}{r}, \lambda_i + \frac{a}{2}) + A(\omega, x, \frac{\varepsilon}{r}, \lambda_i - \frac{a}{2})) \\
&\quad \exp(\frac{\varepsilon}{r}|n|) \prod_{j=1}^{r-1} (M(\omega, x, \frac{\varepsilon}{r}, \lambda_j + a)^{-1} \exp(\frac{\varepsilon}{r}|n|)) \\
&\leq B(\omega, x, \varepsilon) \exp(\varepsilon|n|)
\end{aligned}$$

Beweis von Lemma 2.3.1:

Der Beweis beruht im wesentlichen auf dem Konzept der Prinzipalwinkel zwischen Unterräumen. Eine Darstellung dieses Konzepts findet sich z.B. bei Gerretsen [10, Kap. 3.4]. Wir wollen die dort durchgeführte Konstruktion zunächst kurz skizzieren.

Seien also E_1, E_2 zwei Unterräume eines endlich-dimensionalen Vektorraumes mit Skalarprodukt, $\dim E_1 = m$, $\dim E_2 = n$. Es bezeichnet P die Orthogonalprojektion auf E_1 , Q die Orthogonalprojektion auf E_2 . Dann ist $PQ|_{E_1}$ ein symmetrischer Operator. Es existiert daher eine Orthonormalbasis $\{x_i\}_{i=1, \dots, m}$ aus Eigenvektoren von PQ in E_1 . Diese können so angeordnet werden, daß gilt

$$PQ x_i = \sigma_i x_i, i = 1, \dots, k, \quad PQ x_i = 0 \quad i > k$$

mit $\sigma_i \neq 0$. Die Prinzipalwinkel ω_i zwischen E_1 und E_2 sind dann definiert als Winkel zwischen x_i und Qx_i , $i = 1, \dots, k$, das heißt es gilt:

$$\cos^2 \omega_i = \|x_i\|^2 \cos^2 \omega_i = \langle x_i, Qx_i \rangle = \langle Px_i, Qx_i \rangle = \langle x_i, PQx_i \rangle = \sigma_i$$

Man sieht leicht, daß der oben direkt eingeführte Winkel zwischen Unterräumen als einer der Prinzipalwinkel auftritt.

Wir wollen nun zeigen, daß die Prinzipalwinkel eine Darstellung über geeignete äußere Potenzen besitzen. Dies liefert dann das Ergebnis, da sich die Lyapunov-Exponenten äußerer Potenzen relativ leicht berechnen lassen.

Wir setzen zunächst

$$y_i = Qx_i, \quad i = 1, \dots, k$$

Dann gilt jedenfalls

$$\langle x_i, x_j \rangle = \delta_{ij}$$

$$\langle x_i, y_j \rangle = \langle x_i, Qx_j \rangle = \langle Px_i, Qx_j \rangle = \langle x_i, PQx_j \rangle = \sigma_j \delta_{ij}, \quad i \leq k$$

$$\langle x_i, y_j \rangle = 0 \quad \text{für } i \geq k, \text{ da aus } PQx_i = 0 \text{ schon } Qx_i = 0 \text{ folgt}$$

$$\langle y_i, y_j \rangle = \langle Qx_i, Qx_j \rangle = \langle x_i, Qx_j \rangle = \langle Px_i, Qx_j \rangle = \sigma_j \delta_{ij}$$

Man kann leicht sehen, daß die $\{y_i\}_{i=1, \dots, k}$ Eigenvektoren des Operators $QP|_{E_2}$ zu den Eigenwerten $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ sind. Wir können das System $\{y_i\}_{i=1, \dots, k}$ daher durch hinzufügen von Eigenvektoren zum Eigenwert 0 zu einer Orthogonalbasis $\{y_i\}_{i=1, \dots, n}$ von E_2 ergänzen. Dann gilt weiter

$$\langle y_i, x_j \rangle = 0, \quad i > k$$

Damit ergibt sich:

$$\|x_1 \wedge \dots \wedge x_m \wedge y_1 \wedge \dots \wedge y_n\|^2 = \det \begin{pmatrix} \langle x_1, x_1 \rangle & \dots & \langle x_1, y_n \rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle y_n, x_1 \rangle & \dots & \langle y_n, y_n \rangle \end{pmatrix}$$

$$= \det \left[\begin{array}{ccc|cc} & & & \sigma_1 & & 0 \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \sigma_k & 0 \\ & E & & & & & \\ & & & 0 & & & 0 \\ \hline \sigma_1 & & & \sigma_1 & & & 0 \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & \sigma_k & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & & & E \\ & & & & & & \end{array} \right]$$

$m \qquad \qquad k \qquad \qquad n - k$

$$= \prod_{i=1}^k (1 - \sigma_i) \sigma_i$$

Nach Konstruktion gilt weiter:

$$\|x_1 \wedge \dots \wedge x_m\|^2 = 1, \quad \|y_1 \wedge \dots \wedge y_n\|^2 = \prod_{i=1}^k \sigma_i$$

Damit erhalten wir zunächst:

$$\frac{\|x_1 \wedge \dots \wedge x_m \wedge y_1 \wedge \dots \wedge y_n\|^2}{\|x_1 \wedge \dots \wedge x_m\|^2 \|y_1 \wedge \dots \wedge y_n\|^2} = \prod_{i=1}^k (1 - \sigma_i) = \prod_{i=1}^k \sin^2(\omega_i)$$

Obige Darstellung der Prinzipalwinkel soll nunmehr auf den uns interessierenden Fall, das heißt $E_1 = V_\mu^s(\omega, x)$, $E_2 = V_\mu^u(\omega, x)$ angewendet werden. Hierzu beachte man zunächst,

daß der auf der linken Seite stehende Quotient offenbar von der speziellen Wahl der Basen $\{x_i\}_{i=1,\dots,m}$ und $\{y_i\}_{i=1,\dots,n}$ unabhängig ist. Wir hätten stattdessen also auch eine Normalbasis $\xi_1, \dots, \xi_m, \xi_{m+1}, \dots, \xi_{m+n}$ wählen können. Für eine solche Normalbasis gilt nun aber (siehe Crauel [7, Appendix A, Lemma A.1.3]):

$$\lambda(\xi_{i_1} \wedge \dots \wedge \xi_{i_p}) = \sum_{j=1}^p \lambda(\xi_{i_j})$$

Damit erhält man:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \pm\infty} \log\left(\prod_{i=1}^k \sin(\omega_i(\Theta_n(\omega, x)))\right) &= \lambda(\xi_1 \wedge \dots \wedge \xi_{m+n}) - \lambda(\xi_1 \wedge \dots \wedge \xi_m) \\ &\quad - \lambda(\xi_{m+1} \wedge \dots \wedge \xi_{m+n}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Da aber, wie bereits erwähnt, der Winkel ψ_μ einer der Prinzipalwinkel ist, folgt hieraus:

$$\lim_{n \rightarrow \pm\infty} \log(\sin(\psi_\mu(\Theta_n(\omega, x)))) = 0$$

Man kann leicht sehen, daß dies auch

$$\lim_{n \rightarrow \pm\infty} \log\left(\frac{\sin(\psi_\mu(\Theta_n(\omega, x)))}{2}\right) = 0$$

zur Folge hat. Mittels Lemma 1.1.1 in [16] folgt dann die Behauptung. (Siehe hierzu auch den ersten Abschnitt des Beweises von Lemma 2.1.3). $\square$

Beweis von Lemma 2.1.3:

Wir benutzen zunächst die Integrabilitätsbedingungen, um das Wachstum der Ableitung der Funktion $f_{(\omega, x)}$ längs der Trajektorien zu kontrollieren. Dabei ist zu beachten, daß für $\xi \in T_x M$ $D_\xi f_{(\omega, x)}$ als Endomorphismus von $T_x M$ nach $T_{\varphi(1, \omega, x)} M$ aufgefaßt werden kann, so daß $\|D_\xi f_{(\omega, x)} - D_\eta f_{(\omega, x)}\|$ wohldefiniert ist.

In die Definition von $H(\omega)$ ging ein Atlas (U_i, ψ_i) ein, welcher wegen der Kompaktheit von M als endlich vorausgesetzt werden konnte. Wir wählen nun ein für allemal ein $\delta > 0$, $\delta < R :=$ Injektivitätsradius von M so, daß für $x \in M$ die Riemannsche Kugel $B(x, \delta)$ ganz in einem Kartengebiet $U_{i(x)}$ liegt. Das dies stets möglich ist, sieht man wie folgt:

Für eine Teilmenge $A \subset M$ ist die Abbildung:

$$\begin{aligned} M &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto d(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a) \end{aligned}$$

stetig. Dann ist die Abbildung

$$\begin{aligned} M &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sum_{\substack{i_k \text{ mit} \\ x \in U_{i_k}}} d(x, \partial U_{i_k}) \end{aligned}$$

ebenfalls stetig. Da M kompakt ist, folgt

$$\sum_{i_k(x)} d(x, \partial U_{i_k(x)}) \geq c = \min_{z \in M} \left(\sum_{\substack{i_\ell \\ z \in U_{i_\ell}(z)}} d(z, \partial U_{i_\ell}(z)) \right) > 0$$

Bezeichnet daher N die Anzahl der Überdeckungskarten, so folgt aus obiger Abschätzung: Es existiert zu $x \in M$ mindestens eine Karte (U_{i_k}, ψ_{i_k}) mit $x \in U_{i_k}$ und $d(x, \partial U_{i_k}) \geq \frac{c}{N}$. Wir können daher

$$\delta := \frac{C}{2N}$$

wählen.

Wir wollen nun zeigen:

Zu jedem $\varrho > 0$ existieren Funktionen $D(\omega, \varrho), E(\omega, \varrho)$ derart, daß für (ω, x) aus einer geeigneter Menge $\Lambda \subset \Gamma$, $v(\Lambda) = 1$, stets gilt:

Die Abbildung

$$f_{(\omega, x)} := \text{Exp}_{\varphi(1, \omega, x)}^{-1} \circ \varphi(1, \omega, \cdot) \circ \text{Exp}_x$$

ist für $\xi \in T_x M$ mit $\|\xi\| \leq \delta D(\omega, \varrho)$ wohldefiniert und es gilt:

$$\|D_\xi f_{(\omega, x)} - D_\eta f_{(\omega, x)}\| \leq E(\omega, \varrho) \|\xi - \eta\|$$

Weiterhin können $D(\omega, \varrho)$ und $E(\omega, \varrho)$ so gewählt werden, daß sie die Ungleichungen

$$\begin{aligned} D(\vartheta_n(\omega), \varrho) &\geq D(\omega, \varrho) \exp(-\varrho|n|) & n \in \mathbb{Z} \\ E(\vartheta_n(\omega), \varrho) &\leq E(\omega, \varrho) \exp(\varrho|n|) & n \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

erfüllen.

Nach dem "Mittelwertsatz" für kompakte Mannigfaltigkeiten (für einen Beweis siehe z.B. Crauel [7, Lemma 4.1.1, Korollar 4.1.2]) gilt zunächst:

$$\begin{aligned} d(\varphi(1, \omega, x), \varphi(1, \omega, y)) &\leq \sup_{z \in M} \|T\varphi(1, \omega, z)\| d(x, y) \\ &\leq G(\omega) d(x, y) \\ &\leq \max(G(\omega), 1) d(x, y) \end{aligned}$$

Da wir Levi-Civita-Zusammenhang vorausgesetzt haben, gilt für $\xi \in T_x M$, $\|\xi\| \leq R$ stets $d(x, \text{Exp}_x \xi) = \|\xi\|$, und damit erhalten wir das folgende Zwischenergebnis:

Für alle $\xi \in T_x M$ mit $\|\xi\| \leq \delta(\max(1, G(\omega))^{-1})$ ist $f_{(\omega, x)}$ wohldefiniert und es existieren Karten $(U_i, \psi_i), (U_j, \psi_j)$ aus der gewählten Überdeckung mit $\text{Exp}_x(\xi) \in U_i, \varphi(1, \omega, \text{Exp}_x(\xi)) \in U_j$.

Unter Berücksichtigung dieser Tatsache erhält man nach längerer Rechnung unter Zuhilfenahme lokaler Koordinaten für $v, w \in \tau_x^{\psi_i}(B(0_x, \delta(\max(1, G(\omega))^{-1})))$ die folgende Abschätzung: ($\tau_x^{\psi_j}$ bezeichnet den zu (U_j, ψ_j) assoziierten Isomorphismus $T_x M \cong \mathbb{R}^d$)

$$\begin{aligned} &\|D_i(\tau_{\varphi(1, \omega, x)}^{\psi_j} \circ f_{(\omega, x)} \circ \tau_x^{\psi_i-1}) - D_w(\tau_{\varphi(1, \omega, x)}^{\psi_j} \circ f_{(\omega, x)} \tau_x^{\psi_i-1})\| \\ &\leq C[(\sup_{z \in U_i} \|D_z(\psi_j \circ \varphi(1, \omega, \cdot) \circ \psi_i^{-1})\|)^2 + \sup_{z \in U_i} \|D_z(\psi_j \circ \varphi(1, \omega, \cdot) \circ \psi_i^{-1})\| \\ &\quad + \sup_{z \in U_i} \|D_z^2(\psi_j \circ \varphi(1, \omega, \cdot) \circ \psi_i^{-1})\| \|v - w\|, \\ &\leq C_1[(\max(1, G(\omega)))^2 + \max(1, G(\omega)) + \max(1, H(\omega))] \|v - w\| \end{aligned}$$

mit einer nur von der geometrischen Struktur von M abhängigen Konstanten C_1 (Zum Beweis obiger Ungleichung schiebe man überall Kartenabbildungen ein, trenne die Faktoren auf, schätze einzeln ab, nutze Kompaktheit aus usw.)

Damit ergibt sich schließlich für $\xi, \eta \in T_x M$, $\|\xi\|, \|\eta\| \leq \delta(\max(1, G(\omega))^{-1})$

$$\begin{aligned} &\|D_\xi f_{(\omega, x)} - D_\eta f_{(\omega, x)}\| \\ &\leq C_2[(\max(1, G(\omega)))^2 + \max(1, G(\omega)) + \max(1, H(\omega))] \|\xi - \eta\| \\ &= I(\omega) \|\xi - \eta\| \end{aligned}$$

Betrachten wir nun zum Beispiel den Term $\hat{G}(\omega) := C_2 \max(1, G(\omega))$. Nach Voraussetzung gilt dann: $E \log \hat{G}(\omega) < \infty$. Da der Shift eine maßtreue Transformation ist, folgt hieraus mit dem Birkhoffschen Ergodensatz:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \log \tilde{G}(\vartheta_j(\omega)) \quad \text{existiert } P\text{-fast sicher}$$

Für die einzelnen Summanden bedeutet dies aber

$$\lim_{n \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{|n|} \log \tilde{G}(\vartheta_n(\omega)) = 0 \quad P\text{-fast sicher}$$

Daher existiert zu jedem $\varrho > 0$ eine Zahl $N(\omega)$ mit

$$\tilde{G}(\vartheta_n(\omega)) \leq \exp(\varrho|n|) \quad , |n| \geq N(\omega)$$

Die anderen beiden Summanden lassen sich analog behandeln. Insgesamt ergibt sich damit:

Es existiert eine meßbare Funktion $J(\omega)$ mit

$$I(\vartheta_n(\omega)) \leq J(\omega) \exp(\varrho|n|) \quad \forall n \in \mathbb{Z}, \omega \in \Omega_1, \Omega_1 \subset \Omega, P(\Omega_1) = 1$$

Durch Anwendung eines Lemmas von Pesin [16, Lemma 1.1.1] folgt hieraus die Existenz einer meßbaren Funktion $E(\omega, \varrho)$ mit :

$$\begin{aligned} I(\omega) &\leq E(\varrho, \omega) \\ E(\vartheta_n(\omega), \varrho) &\leq E(\omega, \varrho) \exp(\varrho|n|) \quad n \in \mathbb{Z}, \omega \in \Omega_1 \end{aligned}$$

Die Funktion $D(\varrho, \omega)$ wird aus $\max(1, G(\omega))$ mit einer entsprechenden Menge Ω_2 analog konstruiert. Wir setzen

$$\Lambda = ((\Omega_1 \cap \Omega_2) \times M) \cap \Gamma$$

Damit ist dieser erste Beweisschritt abgeschlossen.

Wir setzen nun:

$$h_{(\omega, x)}(\xi) := f_{(\omega, x)}(\xi) - T\varphi(1, \omega, x)\xi \quad \|\xi\| \leq \delta D(\omega, \varrho)$$

Sei weiter $g(t)$ so gewählt, daß gilt:

$$g(t) = \begin{cases} 1 & \text{falls } t \leq \delta^2/2 \\ 0 & \text{falls } t \geq \delta^2 \end{cases}$$

Dann ist mit $h_{(\omega,x)}$ auch die Abbildung

$$H_{(\omega,x)}(\xi) := h_{(\omega,x)}(\xi)g\left(\frac{\|\xi\|^2}{D^2(\omega,\varrho)K^2(\omega,x,\varrho)}\right)$$

mit einer im Folgenden noch zu definierenden Funktion $K(\omega,x,\varrho) \leq 1$ für alle $\xi \in T_x M$ wohldefiniert.

Wir wollen nun zeigen:

Für $\|\xi\| \leq \delta D(\omega,\varrho)K(\omega,x,\varrho)$ gelten die folgenden Aussagen:

- (α) $\|h_{(\omega,x)}(\xi)\| \leq \delta^2 E(\omega,\varrho)K(\omega,x,\varrho)^2$
- (β) $\|D_\xi h_{(\omega,x)}\| \leq \delta E(\omega,\varrho)K(\omega,x,\varrho)$
- (γ) $\text{Lip } h_{(\omega,x)} \leq \delta E(\omega,\varrho)K(\omega,x,\varrho)$
- (δ) $\text{Lip}^{1/2} D h_{(\omega,x)} \leq (2\delta)^{1/2} E(\omega,\varrho)K(\omega,x,\varrho)^{1/2}$

Dies sieht man wie folgt:

(Der Übersichtlichkeit halber werden im Folgenden die Argumente ω und x gelegentlich weggelassen)

Es gilt

$$\begin{aligned}\|D_\xi h - D_\eta h\| &= \|D_\xi f_{(\omega,x)} - T\varphi(1,\omega,x) - (D_\eta f_{(\omega,x)} - T\varphi(1,\omega,x))\| \\ &= \|D_\xi f_{(\omega,x)} - D_\eta f_{(\omega,x)}\| \leq E(\omega,\varrho)\|\xi - \eta\|\end{aligned}$$

Dh ist also Lipschitz-stetig mit $\text{Lip } Dh \leq E$.

Wegen

$$D_o h = D_o(\text{Exp}_{\varphi(1,\omega,x)}^{-1} \circ \varphi(1,\omega,\cdot) \circ \text{Exp}_x) - T\varphi(1,\omega,x) = 0$$

folgt dann:

$$\|D_\xi h\| = \|D_\xi h - D_o h\| \leq E\|\xi\| \leq E\delta DK \leq \delta EK$$

da $D(\omega,\varrho) \leq 1$ und (β) ist gezeigt.

Weiter gilt

$$\begin{aligned}\|D_\xi h - D_\eta h\| &\leq E\|\xi - \eta\| \leq E\|\xi - \eta\|^{1/2}\|\xi - \eta\|^{1/2} \\ &\leq E(\|\xi\| + \|\eta\|)^{1/2}\|\xi - \eta\|^{1/2} \\ &\leq E(2\delta K)^{1/2}\|\xi - \eta\|^{1/2}\end{aligned}$$

und damit folgt (δ) .

Aufgrund des Mittelwertsatzes ergibt sich weiter

$$\|h(\xi) - h(\eta)\| \leq \sup_{\zeta \in B(0, \delta DK)} \|D_\zeta h\| \|\xi - \eta\| \leq \delta EK \|\xi - \eta\|$$

Damit ist auch (γ) gezeigt.

Wegen $h(0) = 0$ ergibt sich schließlich:

$$\|h(\xi)\| = \|h(\xi) - h(0)\| \leq \delta EK \|\xi\| \leq (\delta EK)(\delta DK) \leq \delta^2 EK^2$$

und damit (α)

Der Beweis geht nun im weiteren den folgenden Gang: Zunächst wird untersucht, welche Konsequenzen die Aussagen $(\alpha) - (\delta)$ für die Funktion $H_{(\omega, x)}$ haben. Die gewonnenen Ungleichungen werden dann von der Riemann-Metrik auf die neue Lyapunov-Metrik umgerechnet. Aus den hieraus entstehenden Abschätzungen wird dann weiter eine geeignete Funktion $K(\omega, x, \rho)$ konstruiert, aus der sich, da $H_{(\omega, x)}$ schon "fast" die Abbildung $F_{(\omega, x)}$ ist, leicht die gesuchte Funktion $C(\omega, x, \epsilon)$ gewinnen läßt.

Wir zeigen zunächst:

- i) $\|H(\xi) - H(\eta)\| \leq b_1 EK D^{-1} \|\xi - \eta\|$
- ii) $\|D_\xi H - D_\eta H\| \leq b_2 EK^{1/2} D^{-5/2} \|\xi - \eta\|^{1/2}$

mit von (ω, x) unabhängigen Konstanten b_1, b_2

Wir wollen nur die Aussage ii) ausführlich beweisen. Die (einfacher zu zeigende) Aussage i) ergibt sich analog mittels (α) und (γ)

Es gilt jedenfalls

$$\begin{aligned}D_\xi H_{(\omega, x)}(\eta) &= D_\xi(h_{(\omega, x)}(\cdot)g(\frac{\|\cdot\|^2}{D^2 K^2}))(\eta) \\ &= \frac{2}{D^2 K^2} g'(\frac{\|\xi\|^2}{D^2 K^2}) h(\xi) \langle \xi, \eta \rangle + g(\frac{\|\xi\|^2}{D^2 K^2}) D_\xi h(\eta)\end{aligned}$$

Zunächst wird der erste Summand getrennt untersucht. Es gilt

$$(a) \quad \|2D^{-2}K^{-2}h(\xi)\langle\xi, \cdot\rangle - 2D^{-2}K^{-2}h(\eta)\langle\eta, \cdot\rangle\| \leq 2\delta EK^{1/2}D^{-2}\|\xi - \eta\|^{1/2}$$

$$(b) \quad \|2D^{-2}K^{-2}h(\xi)\langle\xi, \cdot\rangle\| \leq 4\delta^3 EK D^{-2}$$

falls $\|\xi\|, \|\eta\| \leq \delta DK$

Dies sieht man wie folgt:

Sei $\zeta \in T_x M$. Dann gilt

$$\begin{aligned} & \|h(\xi)\langle\xi, \zeta\rangle - h(\eta)\langle\eta, \zeta\rangle\| \\ &= \|h(\xi)\langle\xi, \zeta\rangle - h(\eta)\langle\xi, \zeta\rangle + h(\eta)\langle\xi, \zeta\rangle - h(\eta)\langle\eta, \zeta\rangle\| \\ &\leq \|h(\xi) - h(\eta)\| \|\xi\| \|\zeta\| + \|h(\eta)\| |\langle\xi - \eta, \zeta\rangle| \\ &\leq \delta EK \|\xi - \eta\| \|\xi\| \|\zeta\| + \delta^2 EK^2 \|\xi - \eta\| \|\zeta\| && \text{wegen } (\alpha) \text{ und } (\gamma) \\ &\leq 2\delta^2 EK^2 \|\xi - \eta\| \|\zeta\| && \text{da } \|\xi\| \leq \delta DK \end{aligned}$$

Also

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{2}{D^2 K^2} h(\xi)\langle\xi, \cdot\rangle - \frac{2}{D^2 K^2} h(\eta)\langle\eta, \cdot\rangle \right\| \\ &\leq \frac{4\delta^2 E}{D^2} \|\xi - \eta\|^{1/2} \|\xi - \eta\|^{1/2} \\ &\leq \frac{4\delta^2 E}{D^2} (2\delta K)^{1/2} \|\xi - \eta\|^{1/2} \\ &= \frac{(2\delta)^{5/2} EK^{1/2}}{D^2} \|\xi - \eta\|^{1/2} \end{aligned}$$

und damit ist (a) gezeigt.

Wegen $2D^2 K^{-2} h(0)\langle 0, \cdot\rangle = 0$ ergibt sich weiter:

$$\left\| \frac{2}{D^2 K^2} h(\xi)\langle\xi, \cdot\rangle \right\| \leq \frac{4\delta^2 E}{D^2} \|\xi\| \leq \left(\frac{4\delta^2 E}{D^2} \right) (\delta K) \leq \frac{4\delta^3 EK}{D^2}$$

und damit (b).

Nun können wir zu unserem Zwischenziel, das heißt zum Beweis von Aussage ii), zurückkommen. Es werden zunächst die beiden im Ausdruck für $D_\xi H$ vorkommenden Terme getrennt abgeschätzt. Hierbei sind drei Fälle zu unterscheiden:

$$- \xi, \eta \in B(0, \delta DK)$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned}
& \|g(\frac{\|\xi\|^2}{D^2 K^2})D_\xi h - g(\frac{\|\eta\|^2}{D^2 K^2})D_\eta h\| \\
&= \|g(\frac{\|\xi\|^2}{D^2 K^2})D_\xi h - g(\frac{\|\eta\|^2}{D^2 K^2})D_\xi h + g(\frac{\|\eta\|^2}{D^2 K^2})D_\xi h - g(\frac{\|\eta\|^2}{D^2 K^2})D_\eta h\| \\
&\leq \|D_\xi h\| |g(\frac{\|\xi\|^2}{D^2 K^2}) - g(\frac{\|\eta\|^2}{D^2 K^2})| + \|D_\xi h - D_\eta h\| \\
&\leq \delta EK \operatorname{Lip}^{1/2} g |\frac{\|\xi\|^2}{D^2 K^2} - \frac{\|\eta\|^2}{D^2 K^2}|^{1/2} + (2\delta)^{1/2} EK^{1/2} \|\xi - \eta\| \quad \text{wegen } (\beta), (\delta) \\
&\leq \delta EK \operatorname{Lip}^{1/2} g |\frac{(\|\xi\| + \|\eta\|)(\|\xi\| - \|\eta\|)}{DK \quad DK}|^{1/2} + (2\delta)^{1/2} EK^{1/2} \|\xi - \eta\| \\
&\leq \delta EK \operatorname{Lip}^{1/2} g (2\delta)^{1/2} \frac{\|\xi - \eta\|^{1/2}}{(DK)^{1/2}} + (2\delta)^{1/2} EK^{1/2} \|\xi - \eta\| \\
&\leq \frac{EK^{1/2}}{D^{1/2}} [\delta \operatorname{Lip}^{1/2} g (2\delta)^{1/2} + (2\delta)^{1/2}] \|\xi - \eta\|
\end{aligned}$$

Und

$$\begin{aligned}
& \|g'(\frac{\|\xi\|^2}{D^2 K^2}) \frac{2}{D^2 K^2} h(\xi) \langle \xi, \cdot \rangle - g'(\frac{\|\eta\|^2}{D^2 K^2}) \frac{2}{D^2 K^2} h(\eta) \langle \eta, \cdot \rangle\| \\
&\leq \max |g'| \|\frac{2}{D^2 K^2} h(\xi) \langle \xi, \cdot \rangle - \frac{2}{D^2 K^2} h(\eta) \langle \eta, \cdot \rangle\| \\
&\quad + \|\frac{2}{D^2 K^2} h(\eta) \langle \eta, \cdot \rangle\| |g'(\frac{\|\xi\|^2}{D^2 K^2}) - g'(\frac{\|\eta\|^2}{D^2 K^2})| \\
&\leq \max |g'| \frac{(2\delta)^{5/2}}{D^2} EK^{1/2} \|\xi - \eta\| + \frac{4\delta^3 EK}{D^2} \operatorname{Lip}^{1/2} g' |\frac{\|\xi\|^2}{D^2 K^2} - \frac{\|\eta\|^2}{D^2 K^2}|^{1/2} \quad \text{wegen (a), (b)} \\
&\leq \frac{EK^{1/2}}{D^{5/2}} [\max |g'| (2\delta)^{5/2} + 4\delta^3 (2\delta)^{1/2} \operatorname{Lip}^{1/2} g'] \|\xi - \eta\|^{1/2}
\end{aligned}$$

$$- \xi \in B(0, \delta DK), \eta \notin B(0, \delta DK)$$

Wähle ζ auf der Verbindungsgeraden von ξ nach η mit $\|\zeta\| = \delta DK$. Dann gilt

$$\begin{aligned} & \|g(\frac{\|\xi\|^2}{D^2 K^2})D_\xi h - g(\frac{\|\eta\|^2}{D^2 K^2})D_\eta h\| = \|g(\frac{\|\xi\|^2}{D^2 K^2})D_\xi h\| \\ & \leq \|D_\xi h\| |g(\frac{\|\xi\|^2}{D^2 K^2}) - g(\frac{\|\zeta\|^2}{D^2 K^2})| \\ & \leq \delta EK \operatorname{Lip}^{1/2} g(2\delta)^{1/2} \frac{\|\xi - \zeta\|^{1/2}}{D^{1/2} K^{1/2}} \\ & \leq \frac{EK^{1/2}}{D^{1/2}} [\operatorname{Lip}^{1/2} g(2\delta)^{1/2}] \|\xi - \eta\|^{1/2} \end{aligned}$$

und:

$$\begin{aligned} & \|g'(\frac{\|\xi\|^2}{D^2 K^2}) \frac{2}{D^2 K^2} h(\xi) \langle \xi, \cdot \rangle - g'(\frac{\|\eta\|^2}{D^2 K^2}) \frac{2}{D^2 K^2} h(\eta) \langle \eta, \cdot \rangle\| \\ & \leq \|\frac{2}{D^2 K^2} h(\xi) \langle \xi, \cdot \rangle\| |g'(\frac{\|\xi\|^2}{D^2 K^2}) - g'(\frac{\|\zeta\|^2}{D^2 K^2})| \\ & \leq \frac{4\delta^3 EK}{D^2} \operatorname{Lip}^{1/2} g'(2\delta)^{1/2} \frac{\|\xi - \eta\|^{1/2}}{D^{1/2} K^{1/2}} \quad \text{wegen (b)} \\ & \leq \frac{EK^{1/2}}{D^{5/2}} [4\delta^3 (2\delta)^{1/2} \operatorname{Lip}^{1/2} g'] \|\xi - \eta\|^{1/2} \end{aligned}$$

$$- \xi, \eta \notin B(0, \delta DK)$$

klar.

Damit ergibt sich insgesamt:

$$\|D_\xi H_{(\omega, x)} - D_\eta H_{(\omega, x)}\| \leq b_2 \frac{EK^{1/2}}{D^{5/2}} \|\xi - \eta\|^{1/2}$$

und ii) ist bewiesen.

Dies überträgt sich auf die Lyapunov-Metrik wie folgt:

$$\text{iii) } |H_{(\omega, x)} \xi - H_{(\omega, x)} \eta|_{\Theta(\omega, x)} \leq r b_1 e^e B(\omega, x, \varrho) EK D^{-1} \|\xi - \eta\|_{(\omega, x)}$$

$$\text{iv) } |D_\xi H_{(\omega, x)} - D_\eta H_{(\omega, x)}|_{\Theta(\omega, x)} \leq r^{3/2} b_2 e^e B(\omega, x, \varrho) EK^{1/2} D^{-5/2} \|\xi - \eta\|_{(\omega, x)}^{1/2}$$

Wir zeigen wieder nur iv). Die Aussage iii) ergibt sich analog. Es gilt:

$$\begin{aligned}
& |D_\xi H_{(\omega, x)}(\zeta) - D_\eta H_{(\omega, x)}(\zeta)|_{\Theta(\omega, x)} \\
& \leq B(\Theta(\omega, x), \varrho) \|D_\xi H_{(\omega, x)}(\zeta) - D_\eta H_{(\omega, x)}(\zeta)\| \\
& \leq B(\Theta(\omega, x), \varrho) \|D_\xi H_{(\omega, x)} - D_\eta H_{(\omega, x)}\| \|\zeta\| \\
& \leq B(\Theta(\omega, x), \varrho) \frac{b_2 E K^{1/2}}{D^{5/2}} \|\xi - \eta\| \|\zeta\| \quad \text{wegen ii)} \\
& \leq r^{3/2} b_2 e^e B(\omega, x, \varrho) \frac{E K^{1/2}}{D^{5/2}} |\xi - \eta|_{(\omega, x)} |\zeta|_{(\omega, x)} \quad \text{wegen Lemma 2.1.2}
\end{aligned}$$

Wir setzen nun:

$$K(\omega, x, \varrho) := \min\left(\frac{D^5}{r^3 b_2 e^{2e} B(\omega, x, \varrho)^2 E^2}, \frac{\zeta D}{r b_1 e^e B(\omega, x, \varrho) E}, 1\right)$$

Hierbei bezeichnet ζ die in die Formulierung von 2.1.3 eingehende, die Lipschitz-Nähe von $F_{(\omega, x)}$ und $T\varphi(1, \omega, x)$ bestimmende und beliebig klein zu wählende Konstante.

Dann gilt:

$$\begin{aligned}
K(\Theta_n(\omega, x), \varrho) &= \min\left(\frac{D(\vartheta_n(\omega))^5}{r^3 b_2 e^{2e} B(\Theta_n(\omega, x), \varrho)^2 E(\vartheta_n(\omega))^2}, \frac{\zeta D(\vartheta_n(\omega))}{r b_1 e^e B(\Theta_n(\omega, x), \varrho) E(\vartheta_n(\omega))}, 1\right) \\
&\geq \min\left(\frac{D(\omega)^5 \exp(-9\varrho|n|)}{r^3 b_2 e^{2e} B(\omega, x, \varrho)^2 E(\omega)^2}, \frac{\zeta D(\omega) \exp(-2\varrho|n|)}{r b_1 e^e B(\omega, x, \varrho) E(\omega)}, 1\right) \\
&\geq K(\omega, x, \varrho) \exp(-9\varrho|n|)
\end{aligned}$$

Wählen wir nun speziell: $\varrho = \frac{\varepsilon}{10}$ und setzen:

$$C(\omega, x, \varepsilon) := \frac{\delta D(\omega) K(\omega, x, \varrho)}{2^{1/2} r}$$

so gilt:

$$\begin{aligned}
C(\Theta_n(\omega, x), \varepsilon) &= \frac{\delta}{2^{1/2} r} D(\vartheta_n(\omega)) K(\Theta_n(\omega, x), \varrho) \\
&\geq \frac{\delta}{2^{1/2} r} (D(\omega) \exp(-\varrho|n|)) (K(\omega, x, \varrho) \exp(-9\varrho|n|)) \\
&\geq \frac{\delta D(\omega) K(\omega, x, \varrho) \exp(-10\varrho|n|)}{2^{1/2} r} \\
&\geq C(\omega, x, \varepsilon) \exp(-\varepsilon|n|)
\end{aligned}$$

Für diese Wahl von $C(\omega, x, \varepsilon)$ ist Bedingung (c) von Lemma 2.1.3 jedenfalls erfüllt.

Weiter gilt:

$$\begin{aligned} & \text{Lip}_{|\cdot|}(F_{(\omega, x)} - T\varphi(1, \omega, x)) \\ &= \text{Lip}_{|\cdot|} \left((f_{(\omega, x)} - T\varphi(1, \omega, x))g\left(\frac{\delta^2 \|\cdot\|^2}{2r^2 C(\omega, x, \varepsilon)^2}\right) \right) \\ &= \text{Lip}_{|\cdot|} \left((f_{(\omega, x)} - T\varphi(1, \omega, x))g\left(\frac{\|\cdot\|^2}{D^2 K^2}\right) \right) = \text{Lip}_{|\cdot|} H_{(\omega, x)} \leq \zeta \end{aligned}$$

wegen iii). Damit ist auch (a) gezeigt.

Aussage (d) ergibt sich analog unter Verwendung von (iv). Es bleibt nur noch (b) zu zeigen. Sei hierzu $|\xi|_{(\omega, x)} \leq C(\omega, x, \varepsilon)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} \|\xi\| &\leq r|\xi|_{(\omega, x)} &&\leq \delta 2^{-1/2} D(\omega) K(\omega, x, \varrho) \\ \Rightarrow \|\xi\|^2 &&&\leq \delta^2 2^{-1} D^2 K^2 \\ \Rightarrow \|\xi\|^2 D^{-2} K^{-2} &&\leq \delta^2 2^{-1} \\ \Rightarrow g(\|\xi\|^2 D^{-2} K^{-2}) &= 1 \end{aligned}$$

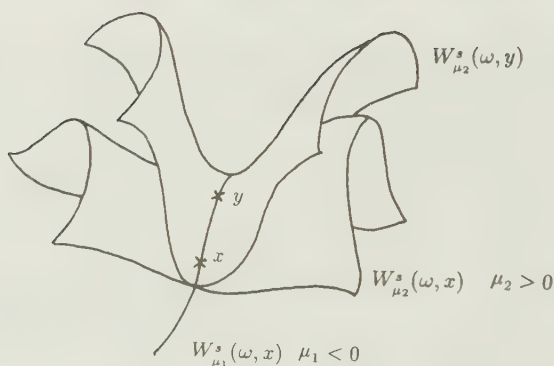
und hieraus folgt die Behauptung nach Konstruktion der Abbildung $F_{(\omega, x)}$. Damit ist das Lemma vollständig bewiesen. $\square$

3 Das Globalisierungsproblem

In Abschnitt 2 wurden lokale invariante Mannigfaltigkeiten zu relativ beliebigen Einschnitten im Lyapunov-Spektrum konstruiert. Es stellt sich nun in natürlicher Weise die Frage, ob sich die lokalen Mannigfaltigkeiten zu einem globalen Objekt mit schöner Struktur "zusammenkleben" lassen.

Für streng stabile Mannigfaltigkeiten ist dies möglich, d.h. die lokalen stabilen Mannigfaltigkeiten zu Parametern $\mu < 0$ lassen sich zu Integralmannigfaltigkeiten der aus den Räumen $V_\mu^s(\omega, x)$ bestehenden Distribution vereinigen. Dies wurde von Carverhill [5, Theorem 2.2.2] gezeigt; siehe hierzu auch Ruelle [19, Theorem 6.3] und Pesin [17, Theorem 3]. In den Beweisen der obigen Arbeiten wird nun aber intensiv Gebrauch der dynamischen Charakterisierung streng stabiler Mannigfaltigkeiten entsprechend Korollar 2.1.5 gemacht. Diese dynamische Charakterisierung geht für Parameterwerte $\mu > 0$ verloren. Typischerweise ist dieses Phänomen mit einer lokalen Nichteindeutigkeit verbunden, d.h. verschiedene Wahlen der Abschnidefunktionen und der eingehenden Parameter können unterschiedliche lokale Mannigfaltigkeiten produzieren. Ähnliche Probleme treten zum Beispiel schon bei der Konstruktion deterministischer Zentrumsmannigfaltigkeiten auf, siehe z.B. Boxler [2, S. 118] und Carr [4, S. 28].

Für $\mu > 0$ liegen die Verhältnisse also nicht so einfach. Nun ist aber andererseits auch in diesem Fall die Gestalt der stabilen Mannigfaltigkeiten nicht völlig willkürlich, sondern durch eine globale Konstruktion mit eindeutiger Lösung definiert. Alle Eigenschaften, die die lokalen stabilen Mannigfaltigkeiten eventuell besitzen, sind daher schon in den eindeutig bestimmten Objekten $W^{s,\mu}$ enthalten. Unser Globalisierungsproblem entspricht also der Aufgabe, die Mannigfaltigkeiten $W^{s,\mu}$ genauer zu untersuchen. Dies kann nun in zweierlei Hinsicht geschehen. Einerseits kann man sich ganz allgemein fragen, welche weiteren Eigenschaften invariante Mannigfaltigkeiten für Fixpunkte in Banachräumen haben. Andererseits kann man versuchen, weitere Informationen aus der speziellen Gestalt des zugrundeliegenden Banachraumes und der Abbildung $\mathcal{F}$ zu erhalten. Die Kombination beider Ansätze liefert dann als zentrales Ergebnis die Tatsache, daß entlang der streng stabilen Mannigfaltigkeiten die verallgemeinerten stabilen Mannigfaltigkeiten glatt zusammenpassen, d.h. für $y \in W_{\mu_1}^s(\omega, x)$, $\mu_1 < 0$ gilt $T_y W_{\mu_2}^s(\omega, x) = V_{\mu_2}^s(\omega, y)$, $\mu_2 > 0$. Entlang der streng stabilen Mannigfaltigkeiten hört also alle Willkür auf, und wir erhalten das folgende Bild:



(Wir werden später aus praktischen Gründen obiges Ergebnis nicht direkt zeigen, sondern einen analogen Satz für die instabilen Mannigfaltigkeiten beweisen.) Um nun mehr über invariante Mannigfaltigkeiten in Banachräumen auszusagen, muß man sich die den entsprechenden Existenz-Sätzen zugrundeliegenden Beweise genauer anschauen. Hierbei gibt es im wesentlichen zwei Ansätze. Der erste, auf Irwin [12] zurückgehende, ist für unsere Zwecke nicht so gut geeignet, denn er ist wenig konstruktiv. Dies trifft auf den zweiten, von Hirsch und Pugh [11] entwickelten Ansatz hingegen nicht zu. Die von ihnen benutzte Methode ist einsichtiger und direkter und erlaubt es im Prinzip, die Gleichung der gesuchten invarianten Mannigfaltigkeit richtiggehend auszurechnen. Es ist dies die Graphentransformationsmethode, die wir nun erläutern wollen.

3.1 Graphentransformation (in Banachräumen von Schnitten)

Sei E ein Banachraum, T ein Isomorphismus, welcher die invarianten Unterräume E_1, E_2 besitzt. Sei weiter $f : E \rightarrow E$ eine globale Lipschitz-Abbildung mit $f(0) = 0$. Ziel ist es nun, einen Algorithmus anzugeben, der invariante Mannigfaltigkeiten für f tangential an E_1 produziert, welche sich als Graphen von Abbildungen $h : E_1 \rightarrow E_2$ darstellen lassen. Sei hierzu $g : E_1 \rightarrow E_2$ eine Lipschitz-stetige Abbildung mit $g(0) = 0$. Unter geeigneten Voraussetzungen an f ist dann $f(\text{graph } g)$ wieder Graph einer Abbildung von E_1 nach E_2 , welche wir mit $\Gamma_f g$ bezeichnen. Man kann leicht sehen, daß dann gelten muß:

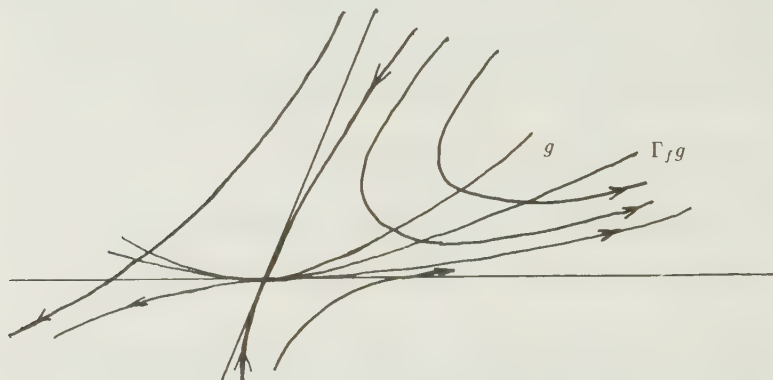
$$\Gamma_f g(x) = (\pi_2 \circ f \circ (id, g)) \circ (\pi_1 \circ f \circ (id, g))^{-1}(x)$$

Graph g ist nun offenbar genau dann eine invariante Mannigfaltigkeit, wenn gilt

$$\Gamma_f g(x) = g(x) \quad \forall x \in E_1$$

Unter geeigneten Voraussetzungen ($\text{Lip}(f - T)$ hinreichend klein, Hyperbolizitätsbedingungen an T usw.) ist sodann die Abbildung $g \rightarrow \Gamma_f g$ wohldefiniert und eine Kontraktion in einem geeigneten Funktionenraum, was einen eindeutigen Fixpunkt, nämlich gerade die gesuchte invariante Mannigfaltigkeit, zur Folge hat.

Mit dieser Methode kann man stets nur *instabile* Mannigfaltigkeiten finden. Der Grund hierfür liegt darin, daß die instabilen Mannigfaltigkeiten einer Abbildung im allgemeinen attrahierend sind. Zur Erläuterung betrachte man die Zeit-1-Abbildung φ_1 des Flusses eines Vektorfeldes im $\mathbb{R}^2$ mit einem hyperbolischen Fixpunkt in 0. Das Phasenporträt sieht dann folgendermaßen aus:



und man sieht deutlich, wie die Graphentransformation wirkt. Ein Beweis des zentralen Theorems B kann daher so geführt werden, daß man obiges Iterationsverfahren für f^{-1} anwendet (Siehe z.B. Dahlke [8], Kap.I für Details). Die Voraussetzungen sind in unserem Fall stets so gewählt, daß obiges Verfahren konvergiert. Weiterhin ist damit klar, daß wir uns im Folgenden die zunächst indirekt durch Inversion von $\mathcal{F}$ aus Theorem B gewonnenen instabilen Mannigfaltigkeiten entsprechend Theorem 2.2.1 stets durch direktes Anwenden des obigen Konstruktionsprinzips gewonnen denken können. Beides führt offenbar zu denselben Objekten. Vor diesem Hintergrund mag es den Anschein haben, daß es systematischer gewesen wäre, von vornherein die Konstruktion instabiler Mannigfaltigkeiten in den Mittelpunkt zu stellen. Dies hätte jedoch andere Schwierigkeiten zur Folge gehabt. Es wäre zum Beispiel sehr viel komplizierter gewesen, die Beziehungen zu den Carverhillschen Ergebnissen darzulegen. (Instabile Mannigfaltigkeiten werden von Carverhill nicht konstruiert, da er Systeme untersucht, die nur auf der positiven Zeitachse definiert sind.)

Wir wollen nun einige später benutzte Eigenschaften der Graphentransformation angeben. Zunächst setzen wir:

Definition 3.1.1 :

Eine Abbildung $\mathcal{G} : B_\mu^u \rightarrow B_\mu^s$ heißt *punktal*, wenn sie Funktionen

$$\mathcal{G}(\omega, x) : V_\mu^u(\omega, x) \rightarrow V_\mu^s(\omega, x)$$

derart induziert, daß gilt

$$\mathcal{G}(S)(\omega, x) = (\omega, \mathcal{G}(\omega, x)\sigma(\omega, x))$$

Dann gilt:

Lemma 3.1.2 :

i) Die Menge

$$N := \{\mathcal{G} \in C^0(B_\mu^u, B_\mu^s) | \mathcal{G} \text{ punktal}, \mathcal{G}(0) = 0, \text{Lip } \mathcal{G} \leq 1\}$$

bildet einen abgeschlossenen Unterraum von

$$M := \{\mathcal{G} \in C^0(B_\mu^u, B_\mu^s) | \mathcal{G}(0) = 0, \text{Lip } \mathcal{G} \leq 1\}$$

ii) Die zu $\mathcal{F}$ gehörenden Graphentransformation $\Gamma_{\mathcal{F}}$ bildet N in sich ab.

Beweis:

Zu i) Führt man auf M die Metrik

$$d(\mathcal{G}, \mathcal{H}) := \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\|\mathcal{G} - \mathcal{H}\|_m}{(1 + \delta)^m C^{-m}}$$

mit

$$\|\mathcal{G} - \mathcal{H}\|_m = \sup_{|S| \leq C^{-m}} |\mathcal{G}S - \mathcal{H}S|$$

ein, wobei $\delta > 0$ und C geeignete Konstanten < 1 sind, so kann man zeigen, daß M mit dieser Metrik ein vollständiger metrischer Raum wird, auf dem die Graphentransformation wohldefiniert ist (siehe Dahlke [8]). Wir wollen zeigen, daß N einen bezüglich obiger Metrik abgeschlossenen Unterraum von M bildet. Seien hierzu $\mathcal{S}, \tilde{\mathcal{S}} \in B_\mu^u$ zwei beliebige Schritte mit $\sigma(\omega, x) = \tilde{\sigma}(\omega, x)$ und $\{\mathcal{G}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge punktaler Abbildungen mit $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{G}_n = \mathcal{G}$. Es ist zu zeigen:

$$\pi_{\text{TM}}\mathcal{G}(\mathcal{S})(\omega, x) = \pi_{\text{TM}}\mathcal{G}(\tilde{\mathcal{S}})(\omega, x)$$

Jedenfalls gilt:

$$\begin{aligned} & |\pi_{\text{TM}}\mathcal{G}(\mathcal{S})(\omega, x) - \pi_{\text{TM}}\mathcal{G}(\tilde{\mathcal{S}})(\omega, x)|_{(\omega, x)} \\ &= |\pi_{\text{TM}}\mathcal{G}(\mathcal{S})(\omega, x) - \mathcal{G}_n(\omega, x)\sigma(\omega, x) + \mathcal{G}_n(\omega, x)\tilde{\sigma}(\omega, x) - \pi_{\text{TM}}\mathcal{G}(\tilde{\mathcal{S}})(\omega, x)|_{(\omega, x)} \end{aligned}$$

da $\sigma(\omega, x) = \tilde{\sigma}(\omega, x)$ und $\{\mathcal{G}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ punktale Folge

$$\begin{aligned} &\leq \sup_{(\omega, x)} |\pi_{\text{TM}}\mathcal{G}(\mathcal{S})(\omega, x) - \mathcal{G}_n(\omega, x)\sigma(\omega, x)|_{(\omega, x)} \\ &\quad + \sup_{(\omega, x)} |\pi_{\text{TM}}\mathcal{G}_n(\omega, x)\tilde{\sigma}(\omega, x) - \pi_{\text{TM}}\mathcal{G}(\tilde{\mathcal{S}})(\omega, x)|_{(\omega, x)} \\ &\leq |\mathcal{G}(\mathcal{S}) - \mathcal{G}_n(\mathcal{S})| + |\mathcal{G}(\tilde{\mathcal{S}}) - \mathcal{G}_n(\tilde{\mathcal{S}})| \end{aligned}$$

Wegen $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{G}_n = \mathcal{G}$ existiert nun aber nach Definition von d für jedes $\varepsilon > 0$ und jedes $m \in \mathbb{N}$ eine Zahl $N \in \mathbb{N}$ mit:

$$\|\mathcal{G} - \mathcal{G}_n\|_m < \varepsilon \quad \text{für } n > N$$

Weiter existiert eine Zahl $m \in \mathbb{N}$ mit:

$$|\mathcal{S}|, |\tilde{\mathcal{S}}| \leq C^{-m}.$$

Damit erhält man insgesamt:

$$\begin{aligned} & |\pi_{\text{TM}}\mathcal{G}(\mathcal{S})(\omega, x) - \pi_{\text{TM}}\mathcal{G}(\tilde{\mathcal{S}})(\omega, x)|_{(\omega, x)} \\ &\leq |\mathcal{G}(\mathcal{S}) - \mathcal{G}_n(\mathcal{S})| + |\mathcal{G}(\tilde{\mathcal{S}}) - \mathcal{G}_n(\tilde{\mathcal{S}})| \\ &\leq \sup_{|\mathcal{S}| \leq C^{-m}} |\mathcal{G}(\mathcal{S}) - \mathcal{G}_n(\mathcal{S})| + \sup_{|\tilde{\mathcal{S}}| \leq C^{-m}} |\mathcal{G}(\tilde{\mathcal{S}}) - \mathcal{G}_n(\tilde{\mathcal{S}})| \\ &\leq \|\mathcal{G} - \mathcal{G}_n\|_m + \|\mathcal{G} - \mathcal{G}_n\|_m \\ &\leq 2\varepsilon \end{aligned}$$

und Teil i) ist gezeigt.

Zu ii) Sei $\mathcal{G} \in N$. Wir setzen

$$\begin{aligned} \phi_{\mathcal{F}}\mathcal{G} &:= \pi_2 \circ \mathcal{F} \circ (id, \mathcal{G}) \\ \psi_{\mathcal{F}}\mathcal{G} &:= \pi_1 \circ \mathcal{F} \circ (id, \mathcal{G}) \end{aligned}$$

wobei π_1 die Projektion $B \rightarrow B_\mu^u$ bezeichnet, analog für π_2 . Dann gilt also:

$$\Gamma_{\mathcal{F}}\mathcal{G} = \phi_{\mathcal{F}}\mathcal{G} \circ \psi_{\mathcal{F}}\mathcal{G}^{-1}$$

Wir zeigen zunächst:

$$\mathcal{S}(\Theta_{-1}(\omega, x)) = \tilde{\mathcal{S}}(\Theta_{-1}(\omega, x)) \Rightarrow \pi_{\text{TM}}\phi_{\mathcal{F}}\mathcal{G}(\mathcal{S})(\omega, x) = \pi_{\text{TM}}\phi_{\mathcal{F}}\mathcal{G}(\tilde{\mathcal{S}})(\omega, x)$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} \pi_{\text{TM}}\phi_{\mathcal{F}}\mathcal{G}(\mathcal{S})(\omega, x) &= \pi_{\text{TM}}(\pi_2 \circ \mathcal{F} \circ (id, \mathcal{G}))(\mathcal{S})(\omega, x) \\ &= \pi_{\text{TM}}(\pi_2 \circ \mathcal{F}(\mathcal{S}, \mathcal{G}(\mathcal{S}))) (\omega, x) \end{aligned}$$

Wegen $\pi_2(\mathcal{S})(\omega, x) = (\omega, \pi_{V_\mu}\sigma(\omega, x))$ und der Definition der Abbildung $\mathcal{F}$ folgt hieraus

$$\begin{aligned} \pi_{\text{TM}}\phi_{\mathcal{F}}\mathcal{G}(\mathcal{S})(\omega, x) &= \\ &= \pi_{\text{TM}}(\omega, \pi_{V_\mu} \circ F_{\Theta_{-1}(\omega, x)}(\sigma(\Theta_{-1}(\omega, x), \mathcal{G}(\Theta_{-1}(\omega, x))\sigma(\Theta_{-1}(\omega, x)))) \\ &= \pi_{V_\mu} F_{\Theta_{-1}(\omega, x)}(\tilde{\sigma}(\Theta_{-1}(\omega, x), \mathcal{G}(\Theta_{-1}(\omega, x))\tilde{\sigma}(\Theta_{-1}(\omega, x)))) \\ &= \pi_{\text{TM}}\phi_{\mathcal{F}}\mathcal{G}(\tilde{\mathcal{S}})(\omega, x) \end{aligned}$$

Eine analoge Beziehung läßt sich auch für $\psi_{\mathcal{F}}\mathcal{G}$ herleiten, was, wie man leicht sieht, für $\psi_{\mathcal{F}}\mathcal{G}^{-1}$ die Implikation

$$\mathcal{S}(\Theta(\omega, x)) = \tilde{\mathcal{S}}(\Theta(\omega, x)) \Rightarrow \pi_{\text{TM}}\psi_{\mathcal{F}}\mathcal{G}^{-1}(\mathcal{S})(\omega, x) = \pi_{\text{TM}}\psi_{\mathcal{F}}\mathcal{G}^{-1}(\tilde{\mathcal{S}})(\omega, x)$$

zur Folge hat.

Seien nun $\mathcal{S}, \tilde{\mathcal{S}} \in B_\mu^n$ mit $\mathcal{S}(\omega, x) = \tilde{\mathcal{S}}(\omega, x)$

Dann folgt

$$\pi_{\text{TM}}\psi_{\mathcal{F}}\mathcal{G}^{-1}(\mathcal{S})(\Theta_{-1}(\omega, x)) = \pi_{\text{TM}}\psi_{\mathcal{F}}\mathcal{G}^{-1}(\tilde{\mathcal{S}})(\Theta_{-1}(\omega, x))$$

und damit

$$\pi_{\text{TM}}\phi_{\mathcal{F}}\mathcal{G}(\psi_{\mathcal{F}}\mathcal{G}^{-1}(\mathcal{S})(\omega, x)) = \pi_{\text{TM}}\phi_{\mathcal{F}}\mathcal{G}(\psi_{\mathcal{F}}\mathcal{G}^{-1}(\tilde{\mathcal{S}})(\omega, x))$$

also

$$\pi_{\text{TM}}\Gamma_{\mathcal{F}}\mathcal{G}(\mathcal{S})(\omega, x) = \pi_{\text{TM}}\Gamma_{\mathcal{F}}\mathcal{G}(\tilde{\mathcal{S}})(\omega, x)$$

□

Aufgrund von Lemma 3.1.2 können wir uns im Folgenden stets auf punktale Abbildungen beschränken. Es ist weiterhin möglich, eine explizite Formel anzugeben, welche die Wirkung der Graphentransformation in diesem speziellen Funktionenraum beschreibt. Man hat:

Satz 3.1.3 :

Sei $\mathcal{G} \in N$. Dann gilt:

$$\text{Graph}(\Gamma_{\mathcal{F}}\mathcal{G}(\Theta(\omega, x))) = F_{(\omega, x)}(\text{Graph } \mathcal{G}(\omega, x))$$

Beweis:

Unter Benutzung der Überlegungen im Beweis von 3.1.2 ergibt sich zunächst:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mathcal{F}}\mathcal{G}(\mathcal{S})(\Theta(\omega, x)) &= \phi_{\mathcal{F}}\mathcal{G} \circ (\psi_{\mathcal{F}}\mathcal{G})^{-1}(\mathcal{S})(\Theta(\omega, x)) \\ &= (\vartheta\omega, \pi_{V_{\mu}^s} \circ F_{(\omega, x)} \circ (id, \mathcal{G}(\omega, x))(\pi_{\text{TM}}(\psi_{\mathcal{F}}\mathcal{G})^{-1}(\mathcal{S})(\omega, x))) \\ &= (\vartheta\omega, \pi_{V_{\mu}^s} \circ F_{(\omega, x)} \circ (id, \mathcal{G}(\omega, x)) \circ (\pi_{V_{\mu}^u} \circ F_{(\omega, x)} \circ (id, \mathcal{G}(\omega, x)))^{-1}(\sigma(\Theta(\omega, x)))) \end{aligned}$$

Daher gilt also:

$$\Gamma_{\mathcal{F}}\mathcal{G}(\Theta(\omega, x))(\xi) = \pi_{V_{\mu}^s} \circ F_{(\omega, x)} \circ (id, \mathcal{G}(\omega, x)) \circ (\pi_{V_{\mu}^u} \circ F_{(\omega, x)} \circ (id, \mathcal{G}(\omega, x)))^{-1}(\xi)$$

Unter Ausnutzung der Bijektivität von $\pi_{V_{\mu}^u} \circ F_{(\omega, x)} \circ (id, \mathcal{G}(\omega, x))$ ergibt sich daher für einen Punkt $(\xi, \Gamma_{\mathcal{F}}\mathcal{G}(\Theta(\omega, x))(\xi)) \in \text{Graph } \Gamma_{\mathcal{F}}\mathcal{G}(\Theta(\omega, x))$:

$$\begin{aligned} (\xi, \Gamma_{\mathcal{F}}\mathcal{G}(\Theta(\omega, x))(\xi)) &= (\pi_{V_{\mu}^u} \circ F_{(\omega, x)} \circ (id, \mathcal{G}(\omega, x))(\eta), \pi_{V_{\mu}^s} \circ F_{(\omega, x)} \circ (id, \mathcal{G}(\omega, x))(\eta)) \\ &= (\pi_{V_{\mu}^u} \circ F_{(\omega, x)}(\eta, \mathcal{G}(\omega, x)(\eta)), \pi_{V_{\mu}^s} \circ F_{(\omega, x)}(\eta, \mathcal{G}(\omega, x)(\eta))) \\ &= F_{(\omega, x)}(\eta, \mathcal{G}(\omega, x)(\eta)) \end{aligned}$$

□

Der in 3.1.3 ausgedrückte Zusammenhang zwischen $\mathcal{G}(\omega, x)$ und $\Gamma_{\mathcal{F}}\mathcal{G}(\Theta(\omega, x))$ bewirkt eine Beziehung zwischen den entsprechenden Ableitungen, und zwar gilt:

Satz 3.1.4 :

Sei $G \in N$ und in 0 differenzierbar. Dann gilt:

$$D_0\mathcal{G}(\omega, x) = 0 \Rightarrow D_0\Gamma_{\mathcal{F}}\mathcal{G}(\Theta(\omega, x)) = 0$$

Beweis:

Folgt unmittelbar aus der in Beweis von 3.1.3 angegebenen Formel für $\Gamma_{\mathcal{F}\mathcal{G}}(\Theta(\omega, x))$, denn es gilt

$$\begin{aligned} D_0(\pi_{V_\mu^s} \circ F_{(\omega, x)} \circ (id, \mathcal{G}(\omega, x))) &= \pi_{V_\mu^s} \circ D_0 F_{(\omega, x)} \circ (id, D_0 \mathcal{G}(\omega, x)) \\ &= \pi_{V_\mu^s} \circ T\varphi(1, \omega, x) \circ (id, 0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

da $T\varphi(1, \omega, x)V_\mu^u(\omega, x) = V_\mu^u(\Theta(\omega, x))$ wegen Theorem A. □

Abschließend soll ein weiterer, die Wirkungsweise der Graphentransformation auf differenzierbare Abbildungen beschreibender Satz angegeben werden, von dem später intensiv Gebrauch gemacht werden wird. Obwohl wir diesen Satz nur für unseren speziellen Kontext angeben, gilt er, wie man auch am Beweis sieht, in allen Funktionenräumen, auf denen die Graphentransformation wohldefiniert ist.

Satz 3.1.5 :

Sei $\mathcal{G} \in N$ und in 0 differenzierbar. Gilt dann $|D_0 \mathcal{G}| > 0$, so folgt

$$|D_0 \Gamma_{\mathcal{F}\mathcal{G}}| < |D_0 \mathcal{G}|$$

Beweis:

Es gilt:

$$\begin{aligned} D_0 \Gamma_{\mathcal{F}\mathcal{G}} &= D_0(\pi_{B_\mu^u} \circ \mathcal{F} \circ (id, \mathcal{G}) \circ D_0(\pi_{B_\mu^u} \circ \mathcal{F} \circ (id, \mathcal{G}))^{-1}) \\ &= D_0 \pi_{B_\mu^u} \circ D_0 \mathcal{F} \circ D_0(id, \mathcal{G}) \circ (D_0(\pi_{B_\mu^u} \circ \mathcal{F} \circ (id, \mathcal{G}))^{-1}) \\ &= \pi_{B_\mu^u} \circ \mathcal{T} \circ (id, D_0 \mathcal{G}) \circ (\pi_{B_\mu^u} \circ \mathcal{T} \circ (id, D_0 \mathcal{G}))^{-1} \\ &= \mathcal{T}|_{B_\mu^u} \circ D_0 \mathcal{G} \circ (\mathcal{T}|_{B_\mu^u})^{-1} \end{aligned}$$

Also

$$\begin{aligned} |D_0 \Gamma_{\mathcal{F}\mathcal{G}}| &= |\mathcal{T}|_{B_\mu^u} \circ D_0 \mathcal{G} \circ (\mathcal{T}|_{B_\mu^u})^{-1}| \\ &\leq |\mathcal{T}|_{B_\mu^u}|D_0 \mathcal{G}| |(\mathcal{T}|_{B_\mu^u})^{-1}| \end{aligned}$$

Wegen $|(\mathcal{T}|_{B_\mu^u})^{-1}| |\mathcal{T}|_{B_\mu^u}| < 1$ folgt damit die Behauptung. □

3.2 Ein zentrales Theorem

Nach den Vorbereitungen in Kapitel 3.1 sind wir nunmehr in der Lage, das zentrale Theorem dieses Abschnitts zu formulieren und zu beweisen.

Der der gesamten Konstruktion zugrundeliegende Kozykel $\varphi(n, \omega, \cdot)$ wurde mittels einer meßbaren Abbildung

$$G : Y \rightarrow \text{Diff}^2(M)$$

konstruiert. (Siehe Abschnitt 1). Die Verteilung von G in $\text{Diff}^2(M)$ sei im weiteren mit Q bezeichnet. Es gilt:

Theorem 3.2.1 :

Es seien die Integrabilitätsbedingungen von Theorem 2.1.1 erfüllt. Seien weiter $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ disjunkt von allen Intervallen $[\lambda_i - a, \lambda_i + a]$ so gewählt, daß gilt: $\mu_1 < 0 < \mu_2$. Ist dann support $Q \subset \text{Diff}^2(M)$ kompakt, so existiert eine Menge $\bar{\Lambda} \subseteq \Lambda \subseteq \Gamma$, $\nu(\bar{\Lambda}) = 1$ derart, daß für $(\omega, x), (\omega, y) \in \bar{\Lambda}$ stets gilt:

$$y \in W_{\mu_2}^u(\omega, x) \cap B(x, \beta(\omega, x)) \Rightarrow T_y W_{\mu_1}^u(\omega, x) = V_{\mu_1}^u(\omega, y)$$

Hierbei bezeichnet $\beta(\omega, x)$ eine analog zu Korollar 2.1.5 für die instabilen Mannigfaltigkeiten konstruierte meßbare Funktion.

Beweis:

Zunächst soll der Gang des Beweises kurz skizziert werden. Offenbar sind wir fertig, wenn wir zeigen können:

$\text{Exp}_y^{-1}(W_{\mu_1}^u(\omega, x))$ ist (lokal) der Graph einer C^1 -Abbildung $\mathcal{L}(\omega, x) : V_{\mu_1}^u(\omega, y) \rightarrow V_{\mu_1}^s(\omega, y)$ mit $D_0 \mathcal{L}(\omega, x) = 0$.

Dies soll nun primär mittels der in Abschnitt 3.1. dargelegten Sätze über die Eigenschaften der Graphentransformation bewiesen werden.

Der Beweis besteht im wesentlichen aus drei Schritten:

Schritt 1:

Es wird gezeigt, daß für n hinreichend groß $\text{Exp}_{\varphi(-n, \omega, y)}(W_{\mu_1}^u(\Theta_{-n}(\omega, x)))$ Graph einer Abbildung $I(\Theta_{-n}(\omega, y))$ bezüglich eines Koordinatensystems ist, das aus den von $\varphi(-n, \omega, x)$

nach $\varphi(-n, \omega, y)$ parallelverschobenen Räumen $V_{\mu_1}^u(\Theta_{-n}(\omega, x)), V_{\mu_1}^s(\Theta_{-n}(\omega, x))$ besteht, und die Lipschitz-Konstante dieser Abbildung berechnet. Der Beweis beruht im wesentlichen auf einem Lemma, welches das Verhältnis von Exponentialabbildung und Parallelverschiebung auf kompakten Mannigfaltigkeiten beschreibt.

Schritt 2:

Hier wird gezeigt, daß aufgrund der in Schritt 1 gezeigten Tatsachen $\text{Exp}_{\varphi(-n, \omega, y)}(W_{\mu_1}^u(\Theta_{-n}(\omega, x)))$ auch Graph einer Abbildung $\mathcal{K}(\Theta_{-n}(\omega, y))$ über den “richtigen” Räumen $V_{\mu_1}^u(\Theta_{-n}(\omega, y)), V_{\mu_1}^s(\Theta_{-n}(\omega, y))$ ist, und wieder die Lipschitz-Konstante abgeschätzt. An dieser Stelle wird die vorausgesetzte Kompaktheit von $\text{supp } Q$ benötigt, denn sie bewirkt eine gewisse Stetigkeit der Oseledec-Räume. Es ist klar, daß obige Behauptung nicht richtig sein könnte, wenn die Oseledec-Räume zu stark “wackeln” würden.

Schritt 3:

Die Abbildungen $\mathcal{K}(\Theta_{-n}(\omega, y))$ werden zu einer Funktion $\mathcal{L}$ im Raum N zusammengefaßt. Auf diese Abbildung werden dann die in Abschnitt 3.1 angegebenen Sätze über die Graphentransformation angewendet. Die in den Schritten 1 und 2 durchgeführten Abschätzungen sichern gerade, daß dies möglich ist. Man kann nun zeigen, daß die Invarianz der ursprünglichen Familie $\{W_{\mu_1}^u(\omega, x) | (\omega, x) \in \Lambda\}$ von instabilen Mannigfaltigkeiten unter dem zugrundeliegenden Kozykel ein Wachstum der Ableitung von $\mathcal{L}$ im Nullschnitt bewirkt. Nach Satz 3.1.5 muß die Ableitung daher verschwinden, was sodann die Tangentialität von $W_{\mu_1}^u(\omega, x)$ an die richtigen Oseledec-Räume zur Folge hat.

In den Beweis gehen diverse Lemmata ein, welche zumeist Abschätzungen geometrischer Größen (z.B. Abstände zwischen Oseledec-Räumen) beinhalten. Aus Gründen der Übersichtlichkeit werden die Beweise dieser Lemmata wieder zurückgestellt und erfolgen im Abschnitt 3.3.

zu Schritt 1:

Bevor wir zum eigentlichen Ziel dieses ersten Beweisschrittes kommen können, sind einige Vorbereitungen nötig. Zunächst müssen entlang des Rückwärts-Orbits in $V_{\mu_1}^u(\Theta_{-n}(\omega, x))$ geeignete Umgebungen $U(\Theta_{-n}(\omega, x))$ konstruiert werden. Diese sollen die Eigenschaft haben, daß einerseits $\text{Lip} \mathcal{H}(\Theta_{-n}(\omega, x))|_{U(\Theta_{-n}(\omega, x))}$ hinreichend klein ist und andererseits gilt: $\text{Exp}_{\varphi(-n, \omega, x)}^{-1} \varphi(-n, \omega, y) = (\eta, \mathcal{H}(\Theta_{-n}(\omega, x))(\eta)), \eta \in U(\Theta_{-n}(\omega, x))$. (Es bezeichnet $\mathcal{H}$ im folgenden stets die instabilen Mannigfaltigkeiten bestimmende Abbildung $B_{\mu_1}^u \rightarrow B_{\mu_1}^s$ und $\mathcal{H}(\omega, x)$ eine hiervon induzierte Funktion: $V_{\mu_1}^u(\omega, x) \rightarrow V_{\mu_1}^s(\omega, x)$, siehe hierzu auch den Beweis von Theorem 2.1.1).

Es ist leicht zu sehen, daß die in die Konstruktion der invarianten Mannigfaltigkeiten eingehenden Funktionen so gewählt werden können, daß für eine beliebige Zahl $0 < \alpha < 1$ stets gilt:

$$|D\mathcal{H}(\mathcal{S}) - D\mathcal{H}(\tilde{\mathcal{S}})| \leq |\mathcal{S} - \tilde{\mathcal{S}}|^\alpha$$

Dies kann man wie folgt einsehen:

Betrachtet man den Beweis von Lemma 2.1.3, so sieht man, daß die Funktion $C(\omega, x, \varepsilon)$ stets so gewählt kann, daß gilt:

$$\text{Lip}_{||}^\alpha D\mathcal{F}_{(\omega, x)} \leq \varrho, \quad \varrho > 0$$

Dies hat lediglich eventuell eine Verkleinerung von $C(\omega, x, \varepsilon)$ und damit der sich ergebenden invarianten Mannigfaltigkeiten zur Folge. Es wurde vorher nur deshalb $\alpha = 1/2, \varrho = 1$ gewählt, um den technischen Aufwand gering zu halten.

Mit $D\mathcal{F}_{(\omega, x)}$ genügt aber auch $D\mathcal{F}$ einer Hölder-Bedingung der Ordnung α mit Hölder-Konstante ϱ , denn es gilt:

$$\begin{aligned} & |D\mathcal{F}(\mathcal{S}_1)(\tilde{\mathcal{S}}) - D\mathcal{F}(\mathcal{S}_2)(\tilde{\mathcal{S}})| \\ &= \sup_{(\omega, x)} |D_{\sigma_1(\Theta_{-1}(\omega, x))} F_{\Theta_{-1}(\omega, x)} \tilde{\sigma}(\Theta_{-1}(\omega, x)) - D_{\sigma_2(\Theta_{-1}(\omega, x))} F_{\Theta_{-1}(\omega, x)} \tilde{\sigma}(\Theta_{-1}(\omega, x))|_{(\omega, x)} \\ &\leq \sup_{(\omega, x)} |D_{\sigma_1(\Theta_{-1}(\omega, x))} F_{\Theta_{-1}(\omega, x)} - D_{\sigma_2(\Theta_{-1}(\omega, x))} F_{\Theta_{-1}(\omega, x)}| |\tilde{\sigma}(\Theta_{-1}(\omega, x))|_{(\omega, x)} \\ &\leq \varrho \sup_{(\omega, x)} |\sigma_1(\Theta_{-1}(\omega, x)) - \sigma_2(\Theta_{-1}(\omega, x))|_{\Theta_{-1}(\omega, x)}^\alpha |\tilde{\sigma}(\Theta_{-1}(\omega, x))|_{\Theta_{-1}(\omega, x)} \\ &\leq \varrho |\mathcal{S}_1 - \mathcal{S}_2|^\alpha |\tilde{\mathcal{S}}| \end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung leicht mittels des folgenden Theorems (zum Beweis siehe wieder Appendix):

Theorem F:

Es seien die Voraussetzungen von Theorem C erfüllt. Gilt dann zusätzlich

$$\|Df(x) - Df(y)\| \leq \varrho \|x - y\|^\alpha$$

mit hinreichend kleinen Konstanten ρ und α , so folgt:

$$\|Dg(x) - Dg(y)\| \leq \|x - y\|^\alpha$$

Wegen $D\mathcal{H}(0) = 0$ folgt damit:

$$|D\mathcal{H}(\mathcal{S})| \leq |\mathcal{S}|^\alpha$$

was auf den einzelnen Tangentialräumen die Ungleichungen

$$|D_\xi \mathcal{H}(\omega, x)|_{(\omega, x)} \leq |\xi|_{(\omega, x)}^\alpha$$

zur Folge hat. Dies wiederum heißt:

$$\text{Lip}|_{|(\omega, x)} \mathcal{H}(\omega, x)|_{B(0, R(\omega, x))} \leq R(\omega, x)^\alpha$$

mit einer noch zu definierenden Funktion $R(\omega, x)$. In der ursprünglichen Riemann-Metrik bedeutet dies (siehe Lemma 2.1.2):

$$\text{Lip}_{||} \mathcal{H}(\omega, x)|_{B(0, R(\omega, x))B(\omega, x, \varepsilon)^{-1}} \leq r B(\omega, x, \varepsilon) R(\omega, x)^\alpha$$

Ein Verkleinern der Kugeln $B(0, R B^{-1})$ hat also direkt ein Verkleinern der Lipschitz-Konstanten der Funktionen $\mathcal{H}(\omega, x)$ über diesen Kugeln zur Folge. Wir wollen nun $R(\omega, x)$ entlang des Rückwärts-Orbits $\varphi(-n, \omega, x)$ gegen Null streben lassen, jedoch so langsam, daß stets noch gilt:

$$\text{Exp}_{\varphi(-n, \omega, x)}^{-1} \varphi(-n, \omega, y) = \xi = (\eta, \mathcal{H}(\Theta_{-n}(\omega, x))(\eta)),$$

$$n \in B(0, R(\Theta_{-n}(\omega, x))B(\Theta_{-n}(\omega, x), \varepsilon)^{-1})$$

Damit erhalten wir die gesuchten Umgebungen durch

$$U(\Theta_{-n}(\omega, x)) := B(0, R(\Theta_{-n}(\omega, x))B(\Theta_{-n}(\omega, x), \varepsilon)^{-1})$$

Man kann zunächst leicht sehen, daß für $\xi \in \text{Graph } \mathcal{H}(\omega, x)$ stets gilt (siehe hierzu den Beweis von Lemma 3.2.5):

$$\|\xi\| \leq R(\omega, x)B(\omega, x, \varepsilon)^{-1}(1 - \cos(\psi(\omega, x)))^{1/2} \Rightarrow \|\eta\| \leq R(\omega, x)B(\omega, x, \varepsilon)^{-1}$$

also $\xi \in \text{Graph } \mathcal{H}(\omega, x)|_{B(0, R(\omega, x))B(\omega, x, \varepsilon)^{-1}}$

Hierbei bezeichnet $\psi(\omega, x)$ wieder den Winkel zwischen $V_{\mu_1}^u(\omega, x)$ und $V_{\mu_1}^s(\omega, x)$

Wir setzen nun:

$$\begin{aligned} R(\Theta_{-n}(\omega, x)) &:= 2\gamma(\omega, x)B(\Theta_{-n}(\omega, x), \varepsilon)(1 - \cos(\psi(\Theta_{-n}(\omega, x))))^{-1/2} \exp(-(\mu_2 + \varepsilon)n) \\ &= 2\gamma(\omega, x)B(\Theta_{-n}(\omega, x), \varepsilon)2^{-1/2} \sin\left(\frac{\psi(\Theta_{-n}(\omega, x))}{2}\right)^{-1} \exp(-(\mu_2 + \varepsilon)n) \end{aligned}$$

wobei $\gamma(\omega, x)$ entsprechend Korollar 2.1.5 gewählt wird.

Dann gilt jedenfalls (wir führen zur Vereinfachung der Notation die Abkürzungen $x_n := \varphi(-n, \omega, x), y_n := \varphi(-n, \omega, y)$ ein):

$$\begin{aligned} \|\text{Exp}_{x_n}^{-1}(y_n)\| &= d(x_n, y_n) \\ &\leq \gamma(\omega, x) \exp(-(\mu_2 + \varepsilon)n) \\ &\leq \frac{1}{2} \{ R(\Theta_{-n}(\omega, x)) B(\Theta_{-n}(\omega, x), \varepsilon)^{-1} 2^{1/2} \sin(\frac{\psi(\Theta_{-n}(\omega, x))}{2}) \} \end{aligned}$$

Also gilt tatsächlich

$$\text{Exp}_{x_n}^{-1}(y_n) = (\eta, \mathcal{H}(\Theta_{-n}(\omega, x))(\eta)).$$

mit einem geeigneten $\eta \in B(0, R(\Theta_{-n}(\omega, x)) B(\Theta_{-n}(\omega, x))^{-1})$.

Für unsere spezielle Wahl der Funktion $R(\omega, x)$ läßt sich die Lipschitz-Konstante der Funktion $\mathcal{H}(\omega, x)$ weiter abschätzen, wenn wir Lemma 2.3.1 benutzen. Dies ergibt mit $M(\omega, x, \varepsilon) := M(\omega, x, \varepsilon, \mu_1)$:

$$\begin{aligned} \text{Lip}_{\|\cdot\|} \mathcal{H}(\Theta_{-n}(\omega, x))|_{B(0, RB^{-1})} &\leq r B(\Theta_{-n}(\omega, x), \varepsilon) R(\omega, x)^\alpha \\ &\leq 2^{\alpha/2} r \gamma(\omega, x)^\alpha B(\Theta_{-n}(\omega, x), \varepsilon)^{1+\alpha} \sin(\frac{\psi(\Theta_{-n}(\omega, x))}{2})^{-\alpha} \\ &\quad \exp(-(\mu_2 + \varepsilon)\alpha n) \\ &\leq 2^{\alpha/2} r \gamma(\omega, x)^\alpha B(\omega, x, \varepsilon)^{1+\alpha} \exp((1 + \alpha)\varepsilon n) M(\Theta_{-n}(\omega, x), \varepsilon)^{-\alpha} \\ &\quad \exp(-(\mu_2 + \varepsilon)\alpha n) \\ &\leq 2^{\alpha/2} r \gamma(\omega, x)^\alpha B(\omega, x, \varepsilon)^{1+\alpha} \exp((1 + \alpha)\varepsilon n) M(\omega, x, \varepsilon) \exp(\varepsilon \alpha n) \\ &\quad \exp(-(\mu_2 + \varepsilon)\alpha n) \\ &\leq C_1 \exp(-(\mu_2 \alpha - (1 + \alpha)\varepsilon)\eta) \end{aligned}$$

wobei C_1 zwar noch von ω und x , jedoch nicht mehr von Punkten des Rückwärts-Orbits abhängt.

Nach diesen Vorbemerkungen können wir nunmehr auf das ursprüngliche Ziel dieses Abschnitts zurückkommen. Es bezeichne $P(x_n, y_n)$ die Parallelverschiebung von x_n nach y_n entlang der eindeutig bestimmten kürzesten Geodätischen. Wir wollen nun zeigen:

Sei $N(\omega, x, y) \in \mathbb{N}$ hinreichend groß. Dann existieren für $n \geq N(\omega, x, y)$ Umgebungen U_{x_n} von $\text{Exp}_{x_n}^{-1} y_n$ in $T_{x_n} M$ und V_{y_n} von 0 in $P(x_n, y_n) V_{\mu_1}^u(\Theta_{-n}(\omega, x))$ mit

$$\text{Exp}_{y_n}^{-1} \circ \text{Exp}_{x_n}(\text{Graph } \mathcal{H}(\Theta_{-n}(\omega, x)) \cap U_{x_n})$$

ist Graph einer Abbildung

$$I(\Theta_{-n}(\omega, y)) : V_{y_n} \rightarrow P(x_n y_n) V_{\mu_1}^s(\Theta_{-n}(\omega, x))$$

mit

$$\text{Lip } I(\Theta_{-n}(\omega, y)) \leq C_3 \exp(-(\mu_2 \alpha - (1 + \alpha) \varepsilon) n)$$

Man kann die obiger Aussage zugrundeliegende Transformation von $\mathcal{H}(\Theta_{-n}(\omega, x))$ als verallgemeinerte Graphentransformation auffassen. Hierzu läßt sich zeigen:

Lemma 3.2.2 :

Seien E und F zwei Banachräume mit Zerlegungen $E = E_1 \oplus E_2$, $F = F_1 \oplus F_2$ und den hiervon induzierten Max-Normen. Sei weiter $T : E \rightarrow F$ ein Isomorphismus mit $T(E_1) = F_1$, $T(E_2) = F_2$ und $f : E \supset U \rightarrow F$ eine Lipschitz-Abbildung. Weiterhin sei $g : E_1 \supset V \rightarrow E_2$ eine Lipschitz-Abbildung mit $\text{Lip } g \leq k < 1$. Ist dann $\text{Lip } (T - f) \leq \ell$ hinreichend klein, so ist $f(\text{graph } g)$ wieder der Graph einer Lipschitz-Abbildung $\Gamma_{fg} : F_1 \supset W \rightarrow F_2$ mit $\text{Lip } \Gamma_{fg} \leq (\|T_2\|k + \ell)(\|T_1^{-1}\|^{-1} - \ell)^{-1}$.

Beweis:

Siehe Abschnitt 3.3 .

□

Wir wollen obiges Lemma anwenden für:

$$\begin{array}{lll} E \triangleq T_{x_n} M & E_1 \triangleq V_{\mu_1}^u(\Theta_{-n}(\omega, x)) & E_2 \triangleq V_{\mu_1}^s(\Theta_{-n}(\omega, x)) \\ F \triangleq T_{y_n} M & F_1 \triangleq P(x_n, y_n) V_{\mu_1}^u(\Theta_{-n}(\omega, x)) & F_2 \triangleq P(x_n, y_n) V_{\mu_1}^s(\Theta_{-n}(\omega, x)) \\ f \triangleq \text{Exp}_{y_n}^{-1} \circ \text{Exp}_{x_n} T \triangleq P(x_n, y_n) \end{array}$$

Daß dies möglich ist, sichert das folgende

Lemma 3.2.3 :

Sei M eine kompakte, Riemannsche Mannigfaltigkeit mit Levi-Cevita-Zusammenhang. Dann existiert eine Konstante c derart, daß für alle $x, y \in M$ mit $d(x, y)$ hinreichend klein gilt:

$$\text{Lip} \{(\text{Exp}_y^{-1} \circ \text{Exp}_x - P(x, y))|_{B(0, 2d(x, y))}\} \leq c d(x, y)$$

Beweis:

Siehe Abschnitt 3.3. □

Man muß nun aber noch bedenken, daß in Lemma 3.2.3 von der ursprünglichen Riemann-Metrik, in Lemma 3.2.2 hingegen von der hiervon durch die Zerlegung induzierten Max-Norm die Rede ist. Bezeichnen wir die Max-Norm mit $|||$, das heißt setzen wir

$$|||\xi|||_{x_n} := \max(\|\xi_1\|, \|\xi_2\|), \xi = \xi_1 + \xi_2, \xi_1 \in V_{\mu_1}^u(\Theta_{-n}(\omega, x)), \xi_2 \in V_{\mu_1}^s(\Theta_{-n}(\omega, x))$$

so gilt (siehe hierzu auch den Beweis von Lemma 3.2.5):

$$\frac{\|\xi\|}{2} \leq |||\xi|||_{x_n} \leq \frac{\|\xi\|}{(1 - \cos(\psi(\Theta_{-n}(\omega, x))))^{1/2}}$$

Berücksichtigt man, daß die Parallelverschiebung eine Isometrie und daher winkelerhaltend ist, so folgt hieraus für hinreichend große $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \text{Lip}_{|||} \{(\text{Exp}_{y_n}^{-1} \circ \text{Exp}_{x_n} - P(x_n, y_n))|_{B(0, 2d(x_n, y_n))}\} &\leq \frac{2c d(x_n, y_n)}{(1 - \cos(\psi(\Theta_{-n}(\omega, x))))^{1/2}} \\ &\leq \frac{2c\gamma(\omega, x) \exp(-(\mu_2 + \varepsilon)n)}{2^{1/2} \sin(\psi(\Theta_{-n}(\omega, x)))} \\ &\leq 2^{1/2} c\gamma(\omega, x) M(\omega, x) \exp(-\mu_2 n) \\ &\leq c_2 \exp(-\mu_2 n) \end{aligned}$$

In unserem Fall gilt weiter: $\|T_1\| = \|T_2\| = 1$; damit folgt aus Lemma 3.2.2:

Für $n \geq N$ hinreichend groß existieren Umgebungen $U_{x_n} \subset T_{x_n} M$, $V_{y_n} \subset P(x_n, y_n) V_{\mu_1}^u(\Theta_{-n}(\omega, x))$ mit:

$$\text{Exp}_{y_n}^{-1} \circ \text{Exp}_{x_n}(\text{Graph } \mathcal{H}(\Theta_{-n}(\omega, x)) \cap U_{x_n})$$

ist Graph einer Abbildung

$$\mathcal{I}(\Theta_{-n}(\omega, y)) : V_{y_n} \rightarrow P(x_n y_n) V_{\mu_1}^s(\Theta_{-n}(\omega, x))$$

mit

$$\text{Lip } \mathcal{I}(\Theta_{-n}(\omega, x)) \leq \left(\frac{c_1 \exp(-(\mu_2 \alpha - (1 + \alpha)\varepsilon)n) + c_2 \exp(-\mu_2 n)}{1 - c_2 \exp(-\mu_2 n)} \right)$$

Hieraus folgt die Behauptung. Damit ist Schritt 1 abgeschlossen.

zu Schritt 2:

Damit später die Sätze aus Abschnitt 3.1 angewendet werden können, müssen die Abbildungen $\mathcal{I}(\Theta_{-n}(\omega, y))$ zunächst auf ganz $P(x_n, y_n) V_{\mu_1}^u(\Theta_{-n}(\omega, x))$ fortgesetzt werden. Es ist nun aber leicht zu sehen (man komponiere zum Beispiel $\mathcal{I}(\Theta_{-n}(\omega, y))$ mit einer geeigneten C^∞ -Abschneidefunktion) daß stets Abbildungen

$$\mathcal{J}(\Theta_{-n}(\omega, y)) : P(x_n, y_n) V_{\mu_1}^u(\Theta_{-n}(\omega, x)) \rightarrow P(x_n, y_n) V_{\mu_1}^s(\Theta_{-n}(\omega, x))$$

derart existieren, daß für geeignete Umgebungen $W_{y_n} \subset V_{y_n}$ gilt:

$$\mathcal{I}(\Theta_{-n}(\omega, y))|_{W_{y_n}} = \mathcal{J}(\Theta_{-n}(\omega, y))|_{W_{y_n}}$$

und

$$\text{Lip } \mathcal{J}(\Theta_{-n}(\omega, y)) \leq c_3 \exp(-(\mu_2 \alpha - (1 + \alpha)\varepsilon)n)$$

Es soll nun gezeigt werden, daß der Graph der Funktion $\mathcal{J}(\Theta_{-n}(\omega, y))$ auch als Graph einer Abbildung von $V_{\mu_1}^u(\Theta_{-n}(\omega, y))$ nach $V_{\mu_1}^s(\Theta_{-n}(\omega, y))$ aufgefaßt werden kann.

Zunächst gilt:

Lemma 3.2.4 :

Sei E ein endlich-dimensionaler Banachraum mit Norm $\|\cdot\|$, welcher die Zerlegungen $E = E_1 \oplus E_2, E = F_1 \oplus F_2$ besitzt. Seien $\|\cdot\|_E^1, \|\cdot\|_E^2$ Normen auf E_1 bzw. E_2 und $\|\xi\|_E = \max(\|\xi_1\|_E^1, \|\xi_2\|_E^2)$ die hiervon induzierte Max-Norm. Analoge Normen seien auch auf F_1, F_2 gegeben, so daß mit geeigneten Konstanten $c_1(E), \dots, c_2(F)$ gilt:

$$\frac{1}{c_1(E)} \|\xi\|_E \leq \|\xi\| \leq c_2(E) \|\xi\|_E$$

$$\frac{1}{c_1(F)} \|\xi\|_F \leq \|\xi\| \leq c_2(F) \|\xi\|_F$$

Sei weiter $g_E : E_1 \rightarrow E_2$ eine Lipschitz-stetige Abbildung mit $\text{Lip}_{\|\cdot\|_E} g_E \leq \delta \leq 1$. Gilt dann mit einem hinreichend kleinen $\varrho > 0$:

$$\max(\|P_{E_1} - P_{F_1}\|, \|P_{E_2} - P_{F_2}\|) < \varrho$$

wobei P_{E_1} die Projektion auf E_1 bezeichnet, analog für E_2, F_1, F_2 , so folgt:
Es existiert eine Lipschitz-stetige Funktion

$$g_F : F_1 \rightarrow F_2$$

mit:

i) $\text{graph } g_F = \text{graph } g_E$

ii) $\text{Lip}_{\|\cdot\|_F} g_F \leq (c_1(E)c_2(E)\varrho + \delta) (1 - c_2(E)c_1(E)\varrho)^{-1} c_1(E)c_1(F)c_2(E)c_2(F)$

Beweis:

Siehe Abschnitt 3.3

□

Hieraus ergibt sich mit

$$E \hat{=} T_{y_n} M, \quad E_1 \hat{=} P(x_n, y_n) V_{\mu_1}^u(\Theta_{-n}(\omega, x)) \quad E_2 \hat{=} P(x_n, y_n) V_{\mu_1}^s(\Theta_{-n}(\omega, x))$$

$$F_1 \hat{=} V_{\mu_1}^u(\Theta_{-n}(\omega, y)), \quad F_2 \hat{=} V_{\mu_1}^s(\Theta_{-n}(\omega, y))$$

und

$$\|\cdot\|_E \hat{=} \|\cdot\|_{y_n}, \quad \|\cdot\|_F \hat{=} \|\cdot\|_{\Theta_{-n}(\omega, y)}$$

wobei $||| \cdot |||_{y_n}$ die auf $T_{y_n}M$ durch die Riemann-Metrik gewonnene Max-Norm und $|\cdot|_{\Theta_{-n}(\omega, y)}$ die Lyapunov-Metrik auf $T_{y_n}M$ bezeichnet, wegen

$$(1 - \cos \psi(\Theta_{-n}(\omega, x)))^{1/2} |||\xi|||_{y_n} \leq \|\xi\| \leq 2 |||\xi|||_{y_n}$$

und

$$\frac{|\xi|_{\Theta_{-n}(\omega, y)}}{B(\Theta_{-n}(\omega, y), \varepsilon)} \leq \|\xi\| \leq r |\xi|_{\Theta_{-n}(\omega, y)}$$

sofort:

Es existieren Funktionen

$$\mathcal{K}(\Theta_{-n}(\omega, y)) : V_{\mu_1}^u(\Theta_{-n}(\omega, y)) \rightarrow V_{\mu_1}^s(\Theta_{-n}(\omega, y))$$

mit

$$\text{Graph } \mathcal{K}(\Theta_{-n}(\omega, y)) = \text{Graph } \mathcal{J}(\Theta_{-n}(\omega, y))$$

und

$$\begin{aligned} & \text{Lip}|_{|\Theta_{-n}(\omega, y)} \mathcal{K}(\Theta_{-n}(\omega, y)) \\ & \leq [2(1 - \cos(\psi(\Theta_{-n}(\omega, x))))^{-1/2} \varrho(\Theta_{-n}(\omega, y)) + c_3 \exp(-(\mu_2 \alpha - (1 + \alpha)\varepsilon)n)] \\ & \quad \cdot [1 - 2(1 - \cos(\psi(\Theta_{-n}(\omega, x))))^{-1/2} \varrho(\Theta_{-n}(\omega, y))]^{-1} 2r(1 - \cos(\psi(\Theta_{-n}(\omega, x))))^{-1/2} \\ & \quad B(\Theta_{-n}(\omega, y), \varepsilon) \\ & \leq [2^{1/2} M(\omega, x, \varepsilon)^{-1} \exp(\varepsilon n) \varrho(\Theta_{-n}(\omega, y)) + c_3 \exp(-(\mu_2 \alpha - (1 + \alpha)\varepsilon)n)] \\ & \quad \cdot [1 - 2^{1/2} M(\omega, x, \varepsilon)^{-1} \exp(\varepsilon n) \varrho(\Theta_{-n}(\omega, y))]^{-1} 2^{1/2} r M(\omega, x, \varepsilon)^{-1} \exp(\varepsilon n) \\ & \quad B(\omega, y, \varepsilon) \exp(\varepsilon n) \\ & \leq [c_4 \varrho(\Theta_{-n}(\omega, y)) \exp(\varepsilon n) + c_3 \exp(-(\mu_2 \alpha - (1 + \alpha)\varepsilon)n)] \\ & \quad \cdot [1 - c_4 \varrho(\Theta_{-n}(\omega, y)) \exp(\varepsilon n)]^{-1} c_5 \exp(2\varepsilon n) \end{aligned}$$

Wie man an obiger Formel sieht, ist es nunmehr von entscheidender Bedeutung, wie sich die Funktion $\varrho(\Theta_{-n}(\omega, y))$ entlang des Rückwärtsorbits verhält. Diese Fragestellung soll nun genauer untersucht werden. Hierzu führen wir zunächst einen Abstandsbegriff zwischen Unterräumen ein, indem wir setzen:

$$\text{dist}(E_1, E_2) := \max\left(\sup_{\xi \in E_1, \|\xi\|=1} \inf_{\eta \in E_2} \|\xi - \eta\|, \sup_{\eta \in E_2, \|\eta\|=1} \inf_{\xi \in E_1} \|\xi - \eta\|\right)$$

Dann kann ϱ zunächst über den Abstand der entsprechenden Unterräume abgeschätzt werden. Hierzu gilt:

Lemma 3.2.5 :

Sei E ein endlich-dimensionaler Vektorraum mit Skalarprodukt, welcher die Zerlegungen $E = E_1 \oplus E_2, E = F_1 \oplus F_2$ mit $\dim E_1 = \dim F_1 = d$ besitzt. Die zugehörige Projektion auf E_1 bzw. F_1 seien mit P_{E_1} bzw. P_{F_1} bezeichnet. Dann gilt:

$$\|P_{E_1} - P_{F_1}\| \leq \frac{2d^{1/2}(\text{dist}(E_1, F_1) + \text{dist}(E_2, F_2))}{(1 - \cos \alpha)(1 - \cos \beta)}$$

wobei α den Winkel zwischen E_1 und E_2 und β den Winkel zwischen F_1 und F_2 bezeichnet.

Beweis:

Siehe Abschnitt 3.3

□

Wenden wir obiges Lemma auf unseren Fall an, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} \varrho(\Theta_{-n}(\omega, y)) &\leq c_6[\text{dist}(V_{\mu_1}^u(\Theta_{-n}(\omega, y)), P(x_n, y_n)V_{\mu_1}^u(\Theta_{-n}(\omega, x))) \\ &\quad + \text{dist}(V_{\mu_1}^s(\Theta_{-n}(\omega, y)), P(x_n, y_n)V_{\mu_1}^s(\Theta_{-n}(\omega, x)))] \\ &\quad M(\omega, x, \varepsilon)^{-2} M(\omega, y, \varepsilon)^{-2} \exp(4\varepsilon n) \end{aligned}$$

Glücklicherweise lassen sich aufgrund der Kompaktheitsvoraussetzung an $\text{supp } Q$ die Abstände der oben auftretenden Unterräume weiter abschätzen. Es gilt:

Lemma 3.2.6 :

Es seien die Voraussetzungen von Theorem 3.2.1 erfüllt. Dann existiert eine Menge $\bar{\Lambda} \subseteq \Lambda, v(\bar{\Lambda}) = 1$ derart, daß für $(\omega, x) \in \bar{\Lambda}$ gilt: Zu $y \in W_{\mu_2}^u(\omega, x) \cap B(x, \beta(\omega, x))$ existiert eine Funktion $N(x_n, y_n)$ und eine Zahl $b > 0$ mit :

$$\text{dist}(V_{\mu_1}^u(\Theta_{-n}(\omega, y)), P(x_n, y_n)V_{\mu_1}^u(\Theta_{-n}(\omega, x))) \leq N(x_n, y_n)d(x_n, y_n)^b$$

$$\text{dist}(V_{\mu_1}^s(\Theta_{-n}(\omega, y)), P(x_n, y_n)V_{\mu_1}^s(\Theta_{-n}(\omega, x))) \leq N(x_n, y_n)d(x_n, y_n)^b$$

und

$$N(x_{n+m}, y_{n+m}) \leq N(x_n, y_n) \exp(2\varepsilon m)$$

Beweis:

Siehe Abschnitt 3.3

□

Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned} \varrho(\Theta_{-n}(\omega, y)) &\leq c_7[2N(x_n, y_n)d(x_n, y_n)^b] \exp(4\varepsilon n) \\ &\leq c_7[2N(x, y) \exp(2\varepsilon n) \gamma(\omega, x)^b \exp(-(\mu_2 + \varepsilon)bn)] \exp(4\varepsilon n) \\ &\leq c_8 \exp(-(\mu_2 b - (6 + b)\varepsilon)n) \end{aligned}$$

Hiermit ergibt sich schließlich insgesamt:

$$\begin{aligned} \text{Lip}_{||\Theta_{-n}(\omega, y)||} \mathcal{K}(\Theta_{-n}(\omega, y)) &\leq [c_g \exp(-(\mu_2 b - (7 + b)\varepsilon)n) + c_3 \exp(-(\mu_2 \alpha - (1 + \alpha)\varepsilon)n)] \\ &\quad [1 - c_g \exp(-(\mu_2 b - (7 + b)\varepsilon)n)]^{-1} c_5 \exp(2\varepsilon n) \end{aligned}$$

Damit ist auch Schritt 2 abgeschlossen.

Schritt 3

Wählen wir $\varepsilon > 0$ hinreichend klein, so folgt mittels der in Schritt 2 hergeleiteten Abschätzung der Lipschitz-Konstanten von $\mathcal{K}(\Theta_{-n}(\omega, y))$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Lip}_{||\mathcal{K}(\Theta_{-n}(\omega, y))||} = 0$$

Es existiert folglich eine Zahl $M(\omega, x, y) \geq N(\omega, x, y), M(\omega, x, y) \in \mathbb{N}$ mit

$$\text{Lip}_{||\mathcal{K}(\Theta_{-n}(\omega, y))||} < 1, \quad \text{für } n \geq M(\omega, x, y)$$

Definieren wir daher eine Abbildung

$$\mathcal{L} : B_{\mu_1}^u \rightarrow B_{\mu_1}^s$$

durch

$$(\mathcal{LS})(\tilde{\omega}, \tilde{x}) = \begin{cases} (\tilde{\omega}, \mathcal{K}(\Theta_{-n}(\omega, y))\sigma(\tilde{\omega}, \tilde{x})) & \text{falls } (\tilde{\omega}, \tilde{x}) = \Theta_{-n}(\omega, y), n \geq M(\omega, x, y) \\ (\tilde{\omega}, 0) & \text{sonst} \end{cases}$$

so gilt offenbar (siehe Abschnitt 3.1):

$$\mathcal{L} \in N$$

und daher ist $\Gamma_{\mathcal{F}}\mathcal{L}$ wohldefiniert.

Nach Satz 3.1.3 gilt nun:

$$\text{Graph } (\Gamma_{\mathcal{F}}\mathcal{L}(\Theta(\tilde{\omega}, \tilde{x}))) = F_{(\tilde{\omega}, \tilde{x})}(\text{Graph } \mathcal{L}(\tilde{\omega}, \tilde{x}))$$

Sei nun speziell $\xi \in \text{Graph } \mathcal{K}(\Theta_{-n}(\omega, y))$, $n \geq M(\omega, x, y)$, $|\xi|_{\Theta_{-n}(\omega, y)}$ hinreichend klein. Dann gilt:

$$\begin{aligned} F_{\Theta_{-n}(\omega, y)}(\xi) &= f_{\Theta_{-n}(\omega, y)}(\xi) \\ &= f_{\Theta_{-n}(\omega, y)} \circ \text{Exp}_{y_n}^{-1} \circ \text{Exp}_{x_n}(\eta) \end{aligned}$$

mit einem geeigneten $\eta \in \text{Graph } \mathcal{H}(\Theta_{-n}(\omega, x))$. Damit ergibt sich weiter:

$$\begin{aligned} F_{\Theta_{-n}(\omega, y)}(\xi) &= \text{Exp}_{y_{n-1}}^{-1} \circ \varphi(1, \vartheta_{-n}(\omega), \cdot) \circ \text{Exp}_{y_n} \circ \text{Exp}_{y_n}^{-1} \circ \text{Exp}_{x_n}(\eta) \\ &= \text{Exp}_{y_{n-1}}^{-1} \circ \text{Exp}_{x_{n-1}} \circ \text{Exp}_{x_{n-1}}^{-1} \circ \varphi(1, \vartheta_{-n}(\omega), \cdot) \circ \text{Exp}_{x_n}(\eta) \end{aligned}$$

Wegen $\text{Exp}_x(\text{Graph } \mathcal{H}(\omega, x)) = W_{\mu_1}^u(\omega, x)$ und der Invarianz der Familie $\{W_{\mu_1}^u(\omega, x) | (\omega, x) \in \Lambda\}$ unter φ folgt damit

$$F_{\Theta_{-n}(\omega, y)}(\xi) = \text{Exp}_{y_{n-1}}^{-1} \circ \text{Exp}_{x_{n-1}}(\zeta)$$

mit einem geeigneten $\zeta \in \text{Graph } \mathcal{H}(\Theta_{-(n-1)}(\omega, x))$. Aufgrund der Konstruktion der Abbildungen $\mathcal{K}(\Theta_{-n}(\omega, y))$ folgt

$$F_{\Theta_{-n}(\omega, y)}(\xi) \in \text{Graph } \mathcal{K}(\Theta_{-(n-1)}(\omega, y))$$

Dies heißt aber:

$$\Gamma_{\mathcal{F}}\mathcal{L}(\Theta_{-n}(\omega, y))|_{U_{\Theta_{-n}(\omega, y)}} = \mathcal{L}(\Theta_{-n}(\omega, y))|_{U_{\Theta_{-n}(\omega, y)}}$$

für $n \geq M(\omega, x, y)$ und hinreichend kleine Umgebungen $U_{\Theta_{-n}(\omega, y)} \subset V_{\mu_1}^u(\Theta_{-n}(\omega, y))$, was wiederum

$$D_0(\Gamma_{\mathcal{F}}\mathcal{L}(\Theta_{-n}(\omega, y))) = D_0\mathcal{L}(\Theta_{-n}(\omega, y))$$

zur Folge hat.

Aufgrund der Definition von $\mathcal{L}$ erhalten wir damit das folgende Zwischenergebnis:

$$|D_0(\Gamma_{\mathcal{FL}}(\tilde{\omega}, \tilde{x}))|_{(\tilde{\omega}, \tilde{x})} \geq |D_0(\mathcal{L}(\tilde{\omega}, \tilde{x}))|_{(\tilde{\omega}, \tilde{x})}$$

Aus $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Lip } \mathcal{K}(\Theta_{-n}(\omega, y)) = 0$ folgt leicht die folgende Tatsache:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ mit } |\xi|_{(\tilde{\omega}, \tilde{x})} < \delta \Rightarrow |\mathcal{L}(\tilde{\omega}, \tilde{x})(\xi) - D_0\mathcal{L}(\tilde{\omega}, \tilde{x})\xi|_{(\tilde{\omega}, \tilde{x})} \leq \varepsilon |\xi|_{(\tilde{\omega}, \tilde{x})}$$

Hieraus folgt weiter: $\mathcal{L}$ ist in 0 differenzierbar und es gilt:

$$D_0\mathcal{L}(\mathcal{S})(\tilde{\omega}, \tilde{x}) = D_0\mathcal{L}(\tilde{\omega}, \tilde{x})\sigma(\tilde{\omega}, \tilde{x})$$

Damit erhält man:

$$\begin{aligned} |D_0\mathcal{L}| &= \sup_{|S| \leq 1} |D_0\mathcal{L}(\mathcal{S})| \\ &\leq \sup_{|S| \leq 1} \sup_{(\tilde{\omega}, \tilde{x})} |D_0\mathcal{L}(\tilde{\omega}, \tilde{x})|_{(\tilde{\omega}, \tilde{x})} |\sigma(\tilde{\omega}, \tilde{x})|_{(\tilde{\omega}, \tilde{x})} \\ &\leq \sup_{(\tilde{\omega}, \tilde{x})} |D_0\mathcal{L}(\tilde{\omega}, \tilde{x})|_{(\tilde{\omega}, \tilde{x})} \end{aligned}$$

Andererseits gilt:

$$\begin{aligned} |D_0(\Gamma_{\mathcal{FL}}(\tilde{\omega}, \tilde{x}))|_{(\tilde{\omega}, \tilde{x})} &= |D_0(\pi_{(\tilde{\omega}, \tilde{x})} \circ \Gamma_{\mathcal{FL}} \circ i_{(\tilde{\omega}, \tilde{x})})|_{(\tilde{\omega}, \tilde{x})} \\ &\leq |D_0(\Gamma_{\mathcal{FL}})| \end{aligned}$$

wobei $\pi_{(\tilde{\omega}, \tilde{x})}$ und $i_{(\tilde{\omega}, \tilde{x})}$ analog zu den im Beweis von Theorem 2.1.1 eingeführten linearen Operatoren definiert sind. Zusammengefaßt folgt aus den drei obigen Ungleichungen die Abschätzung

$$\begin{aligned} |D_0\Gamma_{\mathcal{FL}}| &\geq \sup_{(\tilde{\omega}, \tilde{x})} |D_0(\Gamma_{\mathcal{FL}})(\tilde{\omega}, \tilde{x})|_{(\tilde{\omega}, \tilde{x})} \\ &\geq \sup_{(\tilde{\omega}, \tilde{x})} |D_0\mathcal{L}(\tilde{\omega}, \tilde{x})|_{(\tilde{\omega}, \tilde{x})} \\ &\geq |D_0\mathcal{L}| \end{aligned}$$

Nach Satz 3.1.5 muß daher gelten:

$$D_0\mathcal{L} = 0$$

Das heißt aber:

$$D_0\mathcal{K}(\Theta_{-n}(\omega, y)) = 0 \quad \text{für } n \geq M(\omega, x, y)$$

Für hinreichend großes n ist also die Funktion $\mathcal{K}(\Theta_{-n}(\omega, y))$ tangential an $V_{\mu_1}^u(\Theta_{-n}(\omega, y))$. Nach Satz 3.1.4 muß dann aber gelten:

$$D_0(\Gamma_{\mathcal{F}}^m \mathcal{L}(\Theta_{m-n}(\omega, y))) = 0$$

also:

$$D_0(\Gamma_{\mathcal{F}}^n \mathcal{L}(\omega, y)) = 0$$

Unter Berücksichtigung von Satz 3.1.3 und dem Konstruktionsprinzip der Funktionen $\mathcal{K}(\Theta_{-n}(\omega, y))$ ($\mathcal{K}(\Theta_{-n}(\omega, y))$ ist im Prinzip nichts anderes als die ursprüngliche instabile Mannigfaltigkeit $W_{\mu_1}^u(\Theta_{-n}(\omega, x))$ betrachtet in einem anderen Koordinatensystem) folgt damit aufgrund der Invarianz der Familie $\{W_{\mu_1}^u(\omega, x) | (\omega, x) \in \Lambda\}$ unter φ mit einer geeigneten Umgebung $U_{(\omega, y)} \subset T_y M$:

$$V_{\mu_1}^u(\omega, y) = T_y(\text{Exp}_y\{\text{Graph } \Gamma_{\mathcal{F}}^n \mathcal{L}(\omega, y) \cap U_{(\omega, y)}\}) = T_y W_{\mu_1}^u(\omega, x)$$

Damit ist das Theorem vollständig bewiesen. □

Bemerkungen:

- i) Betrachtet man den obigen Beweis, so hat es den Anschein, als ob man mit den Aussagen von 3.2.1 an der Grenze des Beweisbaren angelangt ist. Weitergehende Sätze bezüglich des globalen Verhaltens lokaler invarianter Mannigfaltigkeiten sind aufgrund der zwangsläufig in die Konstruktion eingehenden Willkür wohl nicht zu zeigen.
- ii) Wie schon in Abschnitt 3.1 erwähnt, kann man sich die stabilen Mannigfaltigkeiten stets durch direktes Anwenden des dort präsentierten Konstruktionsprinzips mittels $\mathcal{F}^{-1}$ gewonnen denken. Damit ist klar, daß ein zu 3.2.1 analoges Theorem für die (verallgemeinerten) stabilen Mannigfaltigkeiten gelten muß, denn der Beweis von 3.2.1 läßt sich mehr oder weniger wörtlich auch mit $\mathcal{F}^{-1}$ durchführen.
- iii) Carverhill zeigt in [5, Theorem 2.2.2], daß sich die streng stabilen Mannigfaltigkeiten zu Integralmannigfaltigkeiten der aus den Räumen $V_{\mu}^s(\omega, x)$ bestehenden Distribution zusammensetzen lassen. Dieses Resultat kann man in etwas schwächerer Form zurückgewinnen, wenn man in Theorem 3.2.1, durchgeführt für $\mathcal{F}^{-1}$, $\mu_1 = \mu_2 < 0$

setzt. Der Beweis von 3.2.1 bleibt dann offenbar richtig, und wir erhalten als Ergebnis, daß die streng stabilen Mannigfaltigkeiten in allen Punkten $(\omega, x) \in \bar{A}$ glatt zusammenpassen. Selbstverständlich läßt sich das Carverhillsche Ergebnis viel leichter zeigen, wenn man, statt mit der oben entwickelten und unserem Problem angepaßten geometrischen Methode zu arbeiten, direkt die dynamische Charakterisierung der streng stabilen Mannigfaltigkeiten entsprechend Korollar 2.1.5 benutzt.

3.3 Beweis der Lemmata 3.2.2 - 3.2.6

Beweis von Lemma 3.2.2:

Es gilt jedenfalls für einen Punkt $\xi \in \text{Graph } g$, d.h. $\xi = (x, g(x))$:

$$\begin{aligned} f(\xi) = f(x, g(x)) &= (\pi_{F_1} \circ f(x, g(x)), \pi_{F_2} \circ f(x, g(x))) \\ &= (\pi_{F_1} \circ f \circ (Id, g)(x), \pi_{F_2} \circ f \circ (Id, g)(x)) \end{aligned}$$

Wir setzen wieder (siehe hierzu auch Kap. 3.1):

$$\phi_f g := \pi_{F_2} \circ f \circ (Id, g)$$

$$\psi_f g := \pi_{F_1} \circ f \circ (Id, g)$$

Man kann nun zeigen: für $\text{Lip}(f - T) \leq \ell$ hinreichend klein ist $\psi_f g$ ein Homöomorphismus auf eine offene Menge und es gilt:

$$\text{Lip } \psi_f g^{-1} \leq (\|T_1^{-1}\|^{-1} - \ell)^{-1}$$

(Man benutze zum Beispiel das "Lipschitz Inverse Function Theorem" in [11, S. 137]. Ähnliche Untersuchungen werden auch in [8], Kapitel 1 durchgeführt.)

Damit erhalten wir zunächst:

$$\tilde{x} = \psi_f g(x) \Rightarrow x = \psi_f^{-1} g(\tilde{x}) \Rightarrow f(x, g(x)) = (\tilde{x}, \phi_f g \circ \psi_f g^{-1}(\tilde{x}))$$

Daher leistet:

$$\Gamma_f g := \phi_f g \circ \psi_f g^{-1}$$

das Gewünschte. Es ist noch die Lipschitz-Konstante abzuschätzen. Jedenfalls gilt:

$$\begin{aligned} \|\phi_f g(x) - \phi_f g(y)\| &= \|\pi_{F_2} \circ f \circ (Id, g)(x) - \pi_{F_2} \circ f \circ (Id, g)(y)\| \\ &\leq \|T_2\| \|g(x) - g(y)\| + \ell \|x - y\| \\ &\leq (\|T_2\|k + \ell) \|x - y\| \end{aligned}$$

und damit erhalten wir:

$$\begin{aligned} \|\Gamma_f g(\tilde{x}) - \Gamma_f g(\tilde{y})\| &= \|\phi_f g \circ \psi_f g^{-1}(\tilde{x}) - \phi_f g \circ \psi_f g^{-1}(\tilde{y})\| \\ &\leq (\|T_2\|k + \ell) \|\psi_f g^{-1}(\tilde{x}) - \psi_f g^{-1}(\tilde{y})\| \\ &\leq \left(\frac{\|T_2\|k + \ell}{\|T_1^{-1}\|^{-1} - \ell} \right) \|\tilde{x} - \tilde{y}\| \end{aligned}$$

und wir sind fertig. □

Beweis von Lemma 3.2.3:

Sei wieder (U_i, ψ_i) die (ein für alle Mal fest gewählte) Kartenüberdeckung mit dem im Beweis von Lemma 2.1.3 eingeführten Parameter δ . Wir wollen nun die beiden in die zu beweisende Abschätzung eingehenden Terme (d.h. Exponentialabbildung und Parallelverschiebung) zunächst getrennt untersuchen. Sei hierzu $x \in M, y \in B(x, \frac{\delta}{2})$. Für $\xi \in B(0_x, \frac{\delta}{2}) \subset T_x M$ gilt dann:

$$\begin{aligned} d(y, \text{Exp}_x \xi) &\leq d(x, y) + d(x, \text{Exp}_x \xi) \\ &\leq \frac{\delta}{2} + \|\xi\| \\ &\leq \delta \end{aligned}$$

Das heißt also: Es existiert eine Karte (U_l, ψ_l) mit $\text{Exp}_x \xi \in U_l$ für alle $\xi \in B(0_x, \frac{\delta}{2})$ und $\text{Exp}_y^{-1} \circ \text{Exp}_x(\xi)$ ist wohldefiniert für alle $y \in B(x, \frac{\delta}{2}), \xi \in B(0_x, \frac{\delta}{2})$, da δ kleiner als der Injektivitätsradius gewählt wurde.

Weiter weiß man, daß

$$\begin{aligned} \pi \times \text{Exp} : TM \supset U &\rightarrow M \times M \\ \xi &\mapsto (\pi(\xi), \text{Exp}_{\pi(\xi)}(\xi)) \end{aligned}$$

eine Einbettung einer Umgebung des Nullschnitts auf eine Umgebung der Diagonalen in $M \times M$ induziert. Die Abbildung:

$$\begin{array}{ccccccc} \begin{array}{c} M \\ \cup \\ B(x, \frac{\delta}{2}) \end{array} & \times & \begin{array}{c} T_x M \\ \cup \\ B(0_x, \frac{\delta}{2}) \end{array} & \xrightarrow{(\text{Id}, \text{Exp})} & \begin{array}{c} M \\ \cup \\ U_\ell \end{array} & \times & \begin{array}{c} M \\ \cup \\ U_\ell \end{array} & \xrightarrow{(\text{Exp} \times \pi)^{-1}} & TM \\ h : & & (y, \xi) & \mapsto & (y, \text{Exp}_x(\xi)) & & & \mapsto & \text{Exp}_y^{-1} \circ \text{Exp}_x(\xi) \end{array}$$

ist daher wohldefiniert und kann mitsamt aller Ableitungen in lokalen Koordinaten abgeschätzt werden (hierbei kann analog zum Beweis von Lemma 2.1.3 vorgegangen werden). Es bezeichne $\tilde{h}$ den lokalen Ausdruck von h , $D_2 \tilde{h}$ die Ableitung nach den zweiten Variablen. Dann gilt:

$$|D_2 \tilde{h}|_{(u,v)} - D_2 \tilde{h}|_{(\tilde{u}, \tilde{v})}| \leq c_1(|u - \tilde{u}| + |v - \tilde{v}|)$$

mit einer geeigneten Konstanten c_1 , ($|\cdot|$ bezeichnet die Euklidische Norm im $\mathbb{R}^d$). Speziell für $\tilde{u} = \psi_l(x), \tilde{v} = 0$ folgt hieraus:

$$|D_2 \tilde{h}|_{\psi_t(y), \tau_x^\psi(\xi)} - \text{Id}| \leq c_2(d(x, y) + \|\xi\|)$$

Für $\|\xi\| \leq 2d(x, y)$ erhalten wir somit die folgende Abschätzung:

$$(\alpha) \quad |D_2 \tilde{\eta}|_{\psi_t(y), \tau_x^\psi(\xi)} - \text{Id}| \leq c_3 d(x, y)$$

Die Parallelverschiebung $P(x, y)$ von x nach y entlang der eindeutig bestimmten kürzesten Geodätischen $c(t)$ wird für Vektoren $X = \sum_{i=1}^d a_i \frac{\partial}{\partial \psi_i}$ in lokalen Koordinaten beschrieben durch das folgende lineare Differentialgleichungssystem:

$$\dot{a} = B \cdot a$$

wobei die Matrix B definiert ist durch:

$$B_j^k := - \sum_{i=1}^d (\Gamma_{ij}^k \circ c) c_i$$

mit:

$$c_i'(t) = (\psi_i \circ c)'(t)$$

Es bezeichne $\tilde{P}(x, y)$ den lokalen Koordinatenausdruck von $P(x, y)$, d.h.:

$$\tilde{P}(x, y)a = a(1)$$

wobei $a(1)$ die Lösung der obigen Differentialgleichung zum Anfangswert $a(0) = a$ ist. Die Abbildung $\tilde{P}(xy) - \text{Id}$ wird dann offenbar durch die Differentialgleichung

$$\dot{\tilde{a}} = B\tilde{a} + Ba, \quad \tilde{a}(0) = 0$$

beschrieben. Diese Differentialgleichung soll nun genauer untersucht werden. Zunächst gilt:

$$\begin{aligned} |B_j^k| &\leq \sum_{i=1}^d |\Gamma_{ij}^k \circ c| |\dot{c}_i| \\ &\leq \sum_{i=1}^d \left(\sup_{x \in U_l} |\Gamma_{ij}^k(x)| \right) |\dot{c}_i| \\ &\leq c_4 \sum_{i=1}^d |\dot{c}_i| \end{aligned}$$

Weiter gilt:

$$\begin{aligned} |\dot{c}_i| &\leq g_{ii}^{-1}(c(t)) \|\dot{c}(t)\| \\ &\leq \sup_{x \in U_1} (g_{ii}^{-1}(x)) \|\dot{c}(t)\| \\ &\leq c_5 \|\dot{c}(t)\| \end{aligned}$$

wobei $\{g_{i,j}\}$ die Komponenten des Fundamentaltensors in lokalen Koordinaten bezeichnen. Da wir aber Levi-Civita-Zusammenhang vorausgesetzt hatten, gilt:

$$c(t) = \text{Exp}_x(t\xi) \quad \text{mit } \|\xi\| = d(x, y)$$

so daß wir zunächst erhalten:

$$\|\dot{c}(t)\| = \|\dot{c}(0)\| = \|\xi\| = d(x, y)$$

Insgesamt ergibt sich damit:

$$|B| \leq c_6 d(x, y)$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} |\dot{\tilde{a}}(t)| &\leq |B| |\tilde{a}(t)| + |B| |a| \\ &\leq c_6 d(x, y) |\tilde{a}(t)| + c_6 d(x, y) |a| \end{aligned}$$

Nunmehr können wir den folgenden Sachverhalt verwenden (zum Beweis siehe zum Beispiel Knobloch und Kappel [13, S. 121]):

Sei $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Es möge die Ungleichung

$$|\dot{x}(t)| \leq \alpha |x(t)| + \beta$$

mit nicht-negativen Konstanten α, β gelten. Dann besteht für alle t_0, t aus I die Beziehung

$$|x(t)| \leq \gamma \exp(\gamma \alpha |t - t_0|) \{|x(t_0)| + \beta |t - t_0|\}$$

In unserem Fall ergibt sich:

$$|\tilde{a}(1)| \leq \gamma \exp(\gamma c_6 d(x, y)) \{c_6 d(x, y) |a|\}$$

also

$$|(\hat{P}(x, y) - \text{Id})(a)| = |\tilde{a}(1)| \leq c_7 d(x, y) |a|$$

woraus die Ungleichung

$$(\beta) \quad |\hat{P}(x, y) - \text{Id}| \leq c_7 d(x, y)$$

folgt. Fassen wir daher (α) und (β) zusammen, so ergibt sich für $\|\xi\| \leq 2d(x, y)$:

$$|D_2 \hat{h}|_{v_T(y), r_T^*(\xi)} - \hat{P}(x, y)| \leq c_8 d(x, y)$$

was wiederum

$$\|D_\xi(\text{Exp}_y^{-1} \circ \text{Exp}_x) - P(x, y)\| \leq cd(x, y)$$

zur Folge hat. Nach dem Mittelwertsatz ergibt sich daher:

$$\text{Lip}(\text{Exp}_y^{-1} \circ \text{Exp}_x - P(x, y))|_{B(0, 2d(xy))} \leq cd(x, y)$$

□

Beweis von Lemma 3.2.4:

Zu i) Es ist zu zeigen:

$$P_{F_1}|_{\text{graph}_{g_E}} \text{ ist bijektiv}$$

Dann liefert offenbar

$$g_F := P_{F_2} \circ (P_{F_1}|_{\text{graph}_{g_E}})^{-1}$$

das Gewünschte.

A. Injektivität

Es gilt für $\xi, \eta \in E_1$:

$$\begin{aligned}
 & \|P_{F_1}(\xi, g_E(\xi)) - P_{F_1}(\eta, g_E(\eta))\|_E \\
 &= \| (P_{F_1} - P_{E_1})(\xi, g_E(\xi)) - (\eta, g_E(\eta)) + P_{E_1}((\xi, g_E(\xi)) - (\eta, g_E(\eta))) \|_E \\
 &\geq \|P_{E_1}((\xi, g_E(\xi)) - (\eta, g_E(\eta)))\|_E - \|P_{F_1} - P_{E_1}\|_E \|(\xi, g_E(\xi)) - (\eta, g_E(\eta))\|_E \\
 &\geq \|\xi - \eta\|_E - c_1(E)c_2(E)\varrho \|(\xi, g_E(\xi)) - (\eta, g_E(\eta))\|_E
 \end{aligned}$$

Wegen

$$\begin{aligned}
 \|(\xi, g_E(\xi)) - (\eta, g_E(\eta))\|_E &= \max(\|\xi - \eta\|_E, \|g_E(\xi) - g_E(\eta)\|_E) \\
 &= \|\xi - \eta\|_E
 \end{aligned}$$

folgt damit

$$\|P_{F_1}(\xi, g_E(\xi)) - P_{F_1}(\eta, g_E(\eta))\|_E \geq (1 - c_1(E)c_2(E)\varrho) \|(\xi, g_E(\xi)) - (\eta, g_E(\eta))\|_E$$

Dies heißt aber:

$P_{F_1}|_{\text{graph}_{g_E}}$ ist injektiv und es gilt

$$\text{Lip} \|_{\|\cdot\|_E} P_{F_1}^{-1}|_{\text{graph}_{g_E}} \leq (1 - c_1(E)c_2(E)\varrho)^{-1}$$

B. Surjektivität

Wir werden die folgende Beobachtung benutzen:

Sei E ein vollständiger metrischer Raum, B ein Banachraum, $f : E \rightarrow B$ bijektive Abbildung mit Lipschitz-stetiger Inversen. Gilt dann für eine Abbildung $g : E \rightarrow B$ $\text{Lip}(f - g) \leq \ell$ hinreichend klein, so ist g surjektiv.

(Dies kann man wie folgt einsehen: Definiere zu $b \in B$ eine Abbildung

$$\begin{aligned}
 h_b : E &\longrightarrow E \\
 \xi &\longmapsto f^{-1}(f(\xi) - g(\xi) + b)
 \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
 d(h_b(\xi), h_b(\eta)) &= d(f^{-1}(f(\xi) - g(\xi) + b), f^{-1}(f(\eta) - g(\eta) + b)) \\
 &\leq \text{Lip } f^{-1} \|f(\xi) - g(\xi) - (f(\eta) - g(\eta))\| \\
 &\leq \text{Lip } f^{-1} \ell d(\xi, \eta)
 \end{aligned}$$

Für ℓ hinreichend klein ist h_b daher kontrahierend und besitzt einen eindeutigen Fixpunkt ξ_0 . Dann gilt aber:

$$\xi_0 = h_b(\xi_0) = f^{-1}(f(\xi_0) - g(\xi_0) + b) \Rightarrow g(\xi_0) = b \quad)$$

Nun ist aber offenbar $P_{F_1} \circ P_{E_1}|_{\text{graph } g_E}$ eine bijektive Abbildung mit Lipschitz-stetiger Inversen und es gilt:

$$\begin{aligned} & \|P_{F_1} \circ P_{E_1}(\xi, g_E(\xi)) - P_{F_1}(\xi, g_E(\xi)) - (P_{F_1} \circ P_{E_1}(\eta, g_E(\eta)) - P_{F_1}(\eta, g_E(\eta)))\|_E \\ &= \|P_{F_1} \circ P_{E_1}(\xi, g_E(\xi)) - P_{F_1}^2(\xi, g_E(\xi)) - (P_{F_1} \circ P_{E_1}(\eta, g_E(\eta)) - P_{F_1}^2(\eta, g_E(\eta)))\|_E \\ &\leq \|P_{F_1}\|_E \|P_{E_1} - P_{F_1}\|_E \|(\xi, g_E(\xi)) - (\eta, g_E(\eta))\|_E \\ &\leq (1 + \|P_{E_1} - P_{F_1}\|_E) \|P_{E_1} - P_{F_1}\|_E \|(\xi, g_E(\xi)) - (\eta, g_E(\eta))\|_E \end{aligned}$$

Damit ergibt sich:

$$\text{Lip}_{\|\cdot\|_E}(P_{F_1} - P_{F_1} \circ P_{E_1})|_{\text{graph } g_E} \leq (1 + c_1(E)c_2(E)\varrho)c_1(E)c_2(E)\varrho$$

und wir sind fertig wegen obiger Beobachtung.

Zu ii)

Nach dem bisher Gezeigten ist die Abbildung

$$g_F := P_{F_2} \circ (P_{F_1}|_{\text{graph } g_E})^{-1}$$

wohldefiniert und es gilt:

$$\begin{aligned} \text{Lip}_{\|\cdot\|_E} g_F &= \text{Lip}_{\|\cdot\|_E} P_{F_2} \circ (P_{F_1}|_{\text{graph } g_E})^{-1} \\ &\leq \text{Lip}_{\|\cdot\|_E} (P_{F_2} - P_{E_2}) \circ (P_{F_1}|_{\text{graph } g_E})^{-1} \\ &\quad + \text{Lip}_{\|\cdot\|_E} (P_{E_2} \circ (P_{F_1}|_{\text{graph } g_E})^{-1}) \\ &\leq c_1(E)c_2(E)\varrho(1 - c_1(E)c_2(E)\varrho)^{-1} \\ &\quad + \text{Lip}_{\|\cdot\|_E} P_{E_2}|_{\text{graph } g_E} \cdot (1 - c_1(E)c_2(E)\varrho)^{-1} \end{aligned}$$

Nun gilt aber:

$$\begin{aligned} & \|P_{E_2}(\xi, g_E(\xi)) - P_{E_2}(\eta, g_E(\eta))\|_E = \|g_E(\xi) - g_E(\eta)\|_E \\ &\leq \delta \|\xi - \eta\|_E \leq \delta \|(\xi, g_E(\xi)) - (\eta, g_E(\eta))\|_E \end{aligned}$$

und damit ergibt sich insgesamt:

$$\text{Lip}_{\|\cdot\|_E} g_F \leq (c_1(E)c_2(E)\varrho + \delta)(1 - c_1(E)c_2(E)\varrho)^{-1}$$

Hieraus folgt aber:

$$\text{Lip}_{\|\cdot\|} g_F \leq (c_1(E)c_2(E)\varrho + \delta)(1 - c_1(E)c_2(E)\varrho)^{-1}c_1(E)c_2(E)$$

und damit

$$\text{Lip}_{\|\cdot\|_F} g_F \leq (c_1(E)c_2(E)\varrho + \delta)(1 - c_1(E)c_2(E)\varrho)^{-1}c_1(E)c_2(E)c_1(F)c_2(F)$$

□

Beweis von Lemma 3.2.5

Wir zeigen zunächst:

- i) $\xi \in F_1 \Rightarrow \|(P_{E_1} - P_{F_1})\xi\| \leq \frac{\|\xi\| \text{dist}(E_1, F_1)}{(1 - \cos \alpha)^{1/2}}$
- ii) $\xi \in F_2 \Rightarrow \|(P_{E_1} - P_{F_1})\xi\| \leq \frac{\|\xi\| d^{1/2} \text{dist}(E_2, F_2)}{(1 - \cos \alpha)^{1/2}}$

Durch Kombination dieser beiden obigen Aussagen folgt dann, wie wir sehen werden, die Behauptung.

zu i)

Es bezeichne $P_{E_1}^\perp$ die Orthogonalprojektion auf E_1 .

Wegen

$$\cos \alpha = \max_{\xi \in E_1, \eta \in E_2} \frac{|\langle \xi, \eta \rangle|}{\|\xi\| \|\eta\|}$$

gilt zunächst für $\eta \in E_2$:

$$\cos \alpha \geq \frac{|\langle P_{E_1}^\perp \eta, \eta \rangle|}{\|P_{E_1}^\perp \eta\| \|\eta\|} \geq \frac{\langle P_{E_1}^\perp \eta, \eta \rangle}{\|P_{E_1}^\perp \eta\| \|\eta\|} \geq \frac{\langle P_{E_1}^\perp \eta, P_{E_1}^\perp \eta \rangle}{\|P_{E_1}^\perp \eta\| \|\eta\|} \geq \frac{\|P_{E_1}^\perp \eta\|^2}{\|P_{E_1}^\perp \eta\| \|\eta\|}$$

also

$$\|P_{E_1}^\perp \eta\| \leq \cos \alpha \|\eta\|$$

Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned}\|\eta\|^2 &= \|\eta - P_{E_1}^\perp \eta\|^2 + \|P_{E_1}^\perp \eta\|^2 \\ &\leq \|\eta - P_{E_1}^\perp \eta\|^2 + \cos \alpha \|\eta\|^2\end{aligned}$$

Also:

$$\|\eta\| \leq \frac{\|\eta - P_{E_1}^\perp \eta\|}{(1 - \cos \alpha)^{1/2}}$$

Sei nunmehr $\xi \in F_1$, $\|\xi\| = 1$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\|(P_{E_1} - P_{F_1})\xi\| &= \|P_{E_1}\xi - \xi\| \\ &\leq \frac{\|(P_{E_1}\xi - \xi) - P_{E_1}^\perp(P_{E_1}\xi - \xi)\|}{(1 - \cos \alpha)^{1/2}} \\ &\leq \frac{\|P_{E_1}\xi - \xi - P_{E_1}^\perp P_{E_1}\xi + P_{E_1}^\perp \xi\|}{(1 - \cos \alpha)^{1/2}} \\ &\leq \frac{\|P_{E_1}^\perp \xi - \xi\|}{(1 - \cos \alpha)^{1/2}} \\ &= (\inf_{\eta \in E_1} \|\xi - \eta\|)(1 - \cos \alpha)^{-1/2} \\ &\leq \frac{\text{dist}(E_1, F_1)}{(1 - \cos \alpha)^{1/2}}\end{aligned}$$

Damit ergibt sich für $\xi \in F_1$ beliebig:

$$\|(P_{E_1} - P_{F_1})\xi\| = \|\xi\| \|(P_{E_1} - P_{F_1})\frac{\xi}{\|\xi\|}\| \leq \frac{\|\xi\| \text{dist}(E_1, F_1)}{(1 - \cos \alpha)^{1/2}}$$

zu ii)

Zunächst definieren wir ein neues Skalarprodukt $\ll, \gg$ auf E durch

$$\ll \xi, \eta \gg := \langle P_{E_1}\xi, P_{E_1}\eta \rangle + \langle P_{E_2}\xi, P_{E_2}\eta \rangle$$

$\ll, \gg$ besitzt die folgende Eigenschaft, welche wir am Ende des Beweises zeigen wollen:

$$(*) \quad |\xi| \leq \frac{\|\xi\|}{(1 - \cos \alpha)^{1/2}}$$

wobei $|\cdot|$ die durch $\ll, \gg$ induzierte Norm bezeichnet.

Sei nun $\xi \in F_2$, $\|\xi\| = 1$ und $\{\eta_i\}_{i=1\dots d}$ eine Orthonormalbasis von E_1 . Dann gilt mit $\zeta \in E_2$ beliebig:

$$\begin{aligned} (P_{E_1} - P_{F_1})(\xi) = P_{E_1}(\xi) &= \sum_{i=1}^d \ll \eta_i, \xi \gg \eta_i \\ &= \sum_{i=1}^d \ll \eta_i, \zeta - \xi \gg \eta_i \end{aligned}$$

also:

$$\begin{aligned} \|(P_{E_1} - P_{F_1})(\xi)\|^2 &\leq \left\| \sum_{i=1}^d \ll \eta_i, \zeta - \xi \gg \eta_i \right\|^2 \\ &= \sum_{i=1}^d |\ll \eta_i, \zeta - \xi \gg|^2 \\ &\leq \sum_{i=1}^d |\eta_i|^2 |\zeta - \xi|^2 \\ &\leq d |\zeta - \xi|^2 \end{aligned}$$

Daraus folgt mit (*):

$$\begin{aligned} \|(P_{E_1} - P_{F_1})(\xi)\| &\leq \frac{d^{1/2} \|\zeta - \xi\|}{(1 - \cos \alpha)^{1/2}} \\ &\leq d^{1/2} \left(\inf_{\zeta \in E_2} \|\zeta - \xi\| \right) (1 - \cos \alpha)^{-1/2} \\ &\leq d^{1/2} \left(\sup_{\xi \in F_2, \|\xi\|=1} \inf_{\zeta \in E_2} \|\zeta - \xi\| \right) (1 - \cos \alpha)^{-1/2} \\ &\leq \frac{d^{1/2} \operatorname{dist}(E_2, F_2)}{(1 - \cos \alpha)^{1/2}} \end{aligned}$$

und damit ist ii) gezeigt.

Sei nun $\xi \in E$ beliebig. Aus der Definition von $\ll, \gg$ folgt zunächst:

$$|\xi|^2 = \|P_{E_1} \xi\|^2 + \|P_{E_2} \xi\|^2$$

was wegen (*) die Abschätzungen

$$\|P_{E_1}\xi\| \leq (1 - \cos \alpha)^{-1/2}\|\xi\|, \quad \|P_{E_2}\xi\| \leq (1 - \cos \alpha)^{-1/2}\|\xi\|$$

zur Folge hat. Wenn wir unser Skalarprodukt analog in bezug auf die Räume F_1 und F_2 definieren, führt dies auf die Ungleichungen

$$\|P_{F_1}\xi\| \leq (1 - \cos \beta)^{-1/2}\|\xi\|, \quad \|P_{F_2}\xi\| \leq (1 - \cos \beta)^{-1/2}\|\xi\|$$

Damit erhalten wir insgesamt:

$$\begin{aligned} \|(P_{E_1} - P_{F_1})(\xi)\| &= \|(P_{E_1} - P_{F_1})(P_{F_1}\xi + P_{F_2}\xi)\| \\ &\leq \|(P_{E_1} - P_{F_1})(P_{F_1}\xi)\| + \|(P_{E_1} - P_{F_1})(P_{F_2}\xi)\| \\ &\leq \frac{\|P_{F_1}\xi\| \operatorname{dist}(E_1, F_1)}{(1 - \cos \alpha)^{1/2}} + \frac{\|P_{F_2}\xi\| d^{1/2} \operatorname{dist}(E_2, F_2)}{(1 - \cos \alpha)^{1/2}} \\ &\leq \frac{\|\xi\| \operatorname{dist}(E_1, F_1)}{(1 - \cos \beta)^{1/2}(1 - \cos \alpha)^{1/2}} + \frac{\|\xi\| d^{1/2} \operatorname{dist}(E_2, F_2)}{(1 - \cos \beta)^{1/2}(1 - \cos \alpha)^{1/2}} \\ &\leq \frac{\|\xi\| 2d^{1/2}(\operatorname{dist}(E_1, F_1) + \operatorname{dist}(F_2, F_2))}{(1 - \cos \beta)^{1/2}(1 - \cos \alpha)^{1/2}} \end{aligned}$$

Es bleibt nur noch (*) zu zeigen. Sei hierzu $\{\xi_i\}_{i=1,\dots,d}$ eine Orthonormalbasis von E_1 , $\{\eta_j\}_{j=1,\dots,m}$ eine Orthonormalbasis von E_2 . Dann gilt für

$$\begin{aligned} \xi &= \sum_{i=1}^d a_i \xi_i + \sum_{j=1}^m b_j \eta_j \\ |\xi|^2 &= \ll \sum_{i=1}^d a_i \xi_i + \sum_{j=1}^m b_j \eta_j, \sum_{i=1}^d a_i \xi_i + \sum_{j=1}^m b_j \eta_j \gg \\ &= \sum_{i=1}^d a_i^2 + \sum_{j=1}^m b_j^2 \end{aligned}$$

Damit ergibt sich:

$$\begin{aligned} \|\xi\|^2 &= \sum_{i=1}^d a_i^2 + \sum_{j=1}^m b_j^2 + 2\langle \sum_{i=1}^d a_i \xi_i, \sum_{j=1}^m b_j \eta_j \rangle \\ &= |\xi|^2 + 2\langle \sum_{i=1}^d a_i \xi_i, \sum_{j=1}^m b_j \eta_j \rangle \end{aligned}$$

Wegen

$$\cos \alpha = \max_{\xi \in E_1, \eta \in E_2} \frac{|\langle \xi, \eta \rangle|}{\|\xi\| \|\eta\|}$$

gilt aber:

$$-\langle \sum_{i=1}^d a_i \xi_i, \sum_{j=1}^m b_j \eta_j \rangle \leq \cos \alpha \left\| \sum_{i=1}^d a_i \xi_i \right\| \left\| \sum_{j=1}^m b_j \eta_j \right\|$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned} |\xi|^2 &\leq \|\xi\|^2 + 2 \cos \alpha \left\| \sum_{i=1}^d a_i \xi_i \right\| \left\| \sum_{j=1}^m b_j \eta_j \right\| \\ &= \|\xi\|^2 + 2 \cos \alpha \left(\sum_{i=1}^d a_i^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{j=1}^m b_j^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \|\xi\|^2 + \cos \alpha \left(\sum_{i=1}^d a_i^2 + \sum_{j=1}^m b_j^2 \right) \\ &\leq \|\xi\|^2 + \cos \alpha |\xi|^2 \end{aligned}$$

also:

$$|\xi| \leq \frac{\|\xi\|^2}{(1 - \cos \alpha)^{1/2}}$$

□

Beweis von Lemma 3.2.6:

Wir wollen zunächst zeigen:

Es existiert eine Funktion $\tilde{N}(x_n, y_n)$ und eine Zahl $\tilde{b} > 0$ mit

$$\text{dist}(V_{\mu_1}^u(\Theta_{-n}(\omega, y)), P(x_n, y_n) V_{\mu_1}^u(\Theta_{-n}(\omega, x))) \leq \tilde{N}(x_n, y_n) \cdot d(x_n, y_n)^{\tilde{b}}$$

und es gilt:

$$\tilde{N}(x_{n+m}, y_{n+m}) \leq \tilde{N}(x_n, y_n) \exp(2\epsilon m)$$

Das Problem soll zunächst so modifiziert werden, daß sich das folgende, grundlegende Theorem anwenden läßt:

Theorem G:

Sei X ein metrischer Raum, $\text{diam } X \leq 1$, H ein Hilbertraum und $\{T_i(x)\}$, $i = 0, 1, \dots$, $x \in X$ Folgen von beschränkten, linearen Operatoren $T_i(x) : H \rightarrow H$. Sei weiter:

$$T^n(x) := T_n(x) \circ \dots \circ T_0(x)$$

Für $c > 1$ und $\lambda < \mu$ bezeichne sodann $\Lambda_{c,\lambda,\mu} \subset X$ die Menge der Punkte x für welche eine Zerlegung

$$H = E_1(x) \oplus E_2(x)$$

existiert mit:

$$\|T^n(x)\xi\| \leq c \exp(\lambda n) \|\xi\| \quad \text{für } \xi \in E_1(x)$$

$$\|T^n(x)\xi\| \geq c^{-1} \exp(\mu n) \|\xi\| \quad \text{für } \xi \in E_2(x)$$

Existiert dann weiter eine Zahl $a > 0$ mit

$$\|T^n(x) - T^n(y)\| \leq \exp(an) d(x, y)$$

so gilt für $x, y \in \Lambda_{c,\lambda,\mu}$

$$\text{dist}(E_1(x), E_1(y)) \leq 3c^2 \exp(\mu - \lambda)(d(x, y))^{\frac{\lambda - \mu}{\lambda - a_1}}$$

mit $a_1 > \max(\lambda, a)$

Ein Beweis dieses Theorems unter der zusätzlichen Voraussetzung, daß die Räume E_1 und E_2 orthogonal sind, findet sich bei Brin und Kifer [3, S. 39]. Man kann sich aber leicht davon überzeugen, daß diese Zusatzvoraussetzung nicht notwendig ist.

Wir wollen obiges Theorem anwenden für

$$\begin{aligned} X &\hat{=} (x_n, y_n), & H &\hat{=} T_{y_n} M \\ T_i(y_n) &\hat{=} I_{i+1}^{-1} \circ T \varphi(-1, \Theta_{-(i+n)}(\omega, y)) \circ I_i \\ T_i(x_n) &\hat{=} I_{i+1}^{-1} \circ P(x_{i+1+n}, y_{i+1+n}) \circ T \varphi(-1, \Theta_{-(i+n)}(\omega, x)) \circ P(y_{i+n}, x_{i+n}) \circ I_i \\ E_1(y_n) &\hat{=} V_{\mu_1}^u(\Theta_{-n}(\omega, y)) & E_2(y_n) &\hat{=} V_{\mu_1}^s(\Theta_{-n}(\omega, y)) \\ E_1(x_n) &\hat{=} P(x_n, y_n) V_{\mu_1}^u(\Theta_{-n}(\omega, x)) & E_2(x_n) &\hat{=} P(x_n, y_n) V_{\mu_1}^s(\Theta_{-n}(\omega, y)) \end{aligned}$$

wobei I_i eine lineare Isometrie $T_{y_n} M \rightarrow T_{y_{n+i}} M$ bezeichnet.

Zunächst sollen geeignete Konstanten c, λ und μ konstruiert werden. Dies geschieht mittels der Überlegungen im Beweis von Lemma 2.1.2. Danach existiert eine Funktion $A(\omega, x, \varepsilon, \mu_1)$ mit:

$$\xi \in V_{\mu_1}^s(\omega, x) \Rightarrow \|T \varphi(n, \omega, x) \xi\| \leq A(\omega, x, \varepsilon, \mu_1) \exp(\mu_1 n) \|\xi\|$$

$$\xi \in V_{\mu_1}^u(\omega, x) \Rightarrow \|T \varphi(-n, \omega, x) \xi\| \leq A(\omega, x, \varepsilon, \mu_1) \exp(-\mu_1 n) \|\xi\|$$

und

$$A(\Theta_n(\omega, x), \varepsilon, \mu_1) \leq A(\omega, x, \varepsilon, \mu_1) \exp(\varepsilon |n|)$$

Sei nun

$$\xi = T_{\varphi(n, \omega, x)} \varphi(n, \omega, \cdot)^{-1} \eta, \quad \eta \in V_{\mu_1}^s(\Theta_n(\omega, x))$$

Dann gilt:

$$\begin{aligned} \|\eta\| &\leq A(\omega, x, \varepsilon, \mu_1) \|T_{\varphi(n, \omega, x)} \varphi(n, \omega, \cdot)^{-1} \eta\| \exp(\mu_1 n) \\ &= A(\omega, x, \varepsilon, \mu_1) \|T_{\varphi(n, \omega, x)} \varphi(-n, \vartheta_n \omega, \cdot) \eta\| \exp(\mu_1 n) \end{aligned}$$

Dies heißt aber für $\xi \in V_{\mu_1}^s(\omega, x)$:

$$\|\xi\| \leq A(\Theta_{-n}(\omega, x), \varepsilon, \mu_1) \|T_x \varphi(-n, \omega, \cdot) \xi\| \exp(\mu_1 n)$$

also:

$$\begin{aligned} \|T \varphi(-n, \omega, x) \xi\| &\geq A(\Theta_{-n}(\omega, x), \varepsilon, \mu_1)^{-1} \exp(-\mu_1 n) \|\xi\| \\ &\geq A(\omega, x, \varepsilon, \mu_1)^{-1} \exp(-(\mu_1 + \varepsilon)n) \|\xi\| \end{aligned}$$

Obige Überlegungen können auch für einen Parameter $\tilde{\mu}_1$ mit

$$\tilde{\mu}_1 \leq \mu_1 - 2\varrho, \quad \varrho \geq \varepsilon$$

durchgeführt werden. Dies ergibt:

$$\begin{aligned} \|T \varphi(-n, \omega, x) \xi\| &\geq A(\omega, x, \varepsilon, \tilde{\mu}_1)^{-1} \exp(-(\tilde{\mu}_1 + \varepsilon)n) \|\xi\| \\ &\geq A(\omega, x, \varepsilon, \tilde{\mu}_1)^{-1} \exp(-(\mu_1 - \varrho)n) \|\xi\| \end{aligned}$$

Mit

$$C := \max(A(\Theta_{-n}(\omega, x), \varepsilon, \mu_1), A(\Theta_{-n}(\omega, x), \varepsilon, \tilde{\mu}_1), \\ A(\Theta_{-n}(\omega, y), \varepsilon, \mu_1), A(\Theta_{-n}(\omega, y), \varepsilon, \tilde{\mu}_1))$$

$$\lambda := -\mu_1 \quad \mu := -(\mu_1 - \varrho)$$

gilt dann für $\xi \in V_{\mu_1}^2(\Theta_{-n}(\omega, y))$:

$$\begin{aligned} \|T^m(y_n)\xi\| &= \|T_m(y_n) \circ T_{m-1}(y_n) \circ \dots \circ T_1(y_n)\| \\ &= \|I_{m+1}^{-1} \circ T\varphi(-1, \Theta_{-(m+n)}(\omega, y)) \circ I_m \circ I_m^{-1} \circ T\varphi(-1, \Theta_{-(m-1+n)}(\omega, y)) \circ \\ &\quad I_{m-1} \circ \dots \circ T\varphi(-1, \Theta_{-n}(\omega, y))\xi\| \\ &= \|T\varphi(-1, \Theta_{-(m+n)}(\omega, y)) \circ \dots \circ T\varphi(-1, \Theta_{-n}(\omega, y))\xi\| \\ &= \|T\varphi(-m, \Theta_{-n}(\omega, y))\xi\| \\ &\geq C^{-1} \exp(\mu m) \|\xi\| \end{aligned}$$

Die anderen benötigten Abschätzungen ergeben sich analog.

Wir sind daher fertig, wenn wir zeigen können:

$$(*) \quad \text{dist}(T\varphi(-m, \Theta_{-n}(\omega, x)), T\varphi(-m, \Theta_{-n}(\omega, y))) \leq \exp(am) d(x_n, y_n)$$

mit einer geeigneten Konstanten $a > 0$, wobei für einen Diffeomorphismus $f \in \text{Diff}^2(M)$ gesetzt wird:

$$\begin{aligned} \text{dist}(T_x f, T_y f) &= \\ \begin{cases} \|T_x f\| + \|T_y f\| & \text{falls } \max(d(x, y), d(f(x), f(y))) > R \\ \|T_x f - P(f(y), f(x)) \circ T_y f \circ P(x, y)\| & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

Mit (*) folgt nämlich:

$$\begin{aligned}
& \|T^m(x_n) - T^m(y_n)\| \\
&= \|I_{m+1}^{-1} \circ T\varphi(-m, \Theta_{-n}(\omega, y)) - I_{m+1}^{-1} \circ P(x_{m+n+1}, y_{m+n+1}) \\
&\quad \circ T\varphi(-m, \Theta_{-n}(\omega, x)) \circ P(y_n, x_n)\| \\
&\leq \|I_{m+1}^{-1}\| \text{dist}(T\varphi(-m, \Theta_{-n}(\omega, y)), T\varphi(-m, \Theta_{-n}(\omega, x))) \\
&\leq \exp(an) d(x_n, y_n)
\end{aligned}$$

Mittel Theorem G ergibt sich daher:

$$\text{dist}(V_{\mu_1}^u(\Theta_{-n}(\omega, y)), P(x_n, y_n) V_{\mu_1}^u(\Theta_{-n}(\omega, x))) \leq 3e^2 \exp(\varrho) d(x_n, y_n)^{\frac{\varrho}{a_1 + \mu_1}}$$

Beweis von (*):

Die Aussage entspricht im wesentlichen dem Lemma 5.5 in [3, S. 42]. Da der dort angegebene Beweis jedoch nicht ganz korrekt ist, soll hier eine vollständige, korrigierte Version angegeben werden.

Zunächst folgt wegen der Kompaktheit von $\text{supp } Q$:

$$\begin{aligned}
& \sup_{x \in M, n \in \mathbb{N}} \|T\varphi(-1, \vartheta_{-n}(\omega, x))\| = B_1 < \infty \\
& \text{dist}(T\varphi(-1, \varphi_{-n}(\omega, x)), T\varphi(-1, \vartheta_{-n}(\omega, y))) \leq B_2 d(x, y) \quad n \in \mathbb{N}
\end{aligned}$$

P – fast sicher

Nummehr kann (*) mittels Induktion nach m gezeigt werden:

Wähle $a > \max(2 \log B_1, \log(2B_1), \log(2B_2))$.

Der Fall $m = 1$ entspricht gerade der zweiten der oben angegebenen Abschätzungen. Weiter gilt:

$$\begin{aligned}
& \text{dist}(T\varphi(-(m+1), \Theta_{-n}(\omega, y)), T\varphi(-(m+1), \Theta_{-n}(\omega, x))) \\
&= \|T\varphi(-(m+1), \Theta_{-n}(\omega, y)) - P(x_{n+m+1}, y_{n+m+1}) \circ T\varphi(-(m+1), \Theta_{-n}(\omega, x)) \\
&\quad \circ P(y_n, x_n)\|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \|T\varphi(-1, \Theta_{-(m+n)}(\omega, y)) \circ T\varphi(-m, \Theta_{-n}(\omega, y)) - \\
&\quad - P(x_{n+m+1}, y_{n+m+1})T\varphi(-1, \Theta_{-(m+n)}(\omega, x)) \\
&\quad \circ P(y_{n+m}, x_{n+m}) \circ P(x_{n+m}, y_{n+m}) \circ T\varphi(-m, \Theta_{-n}(\omega, x)) \circ P(y_n, x_n)\| \\
&= \|T\varphi(-1, \Theta_{-(m+n)}(\omega, y)) \circ T\varphi(-m, \Theta_{-n}(\omega, y)) \\
&\quad - P(x_{n+m+1}, y_{n+m+1}) \circ T\varphi(-1, \Theta_{-(m+n)}(\omega, x)) \circ P(y_{n+m}, x_{n+m}) \circ T\varphi(-m, \Theta_{-n}(\omega, y)) \\
&\quad + P(x_{n+m+1}, y_{n+m+1}) \circ T\varphi(-1, \Theta_{-(m+n)}(\omega, x)) \circ P(y_{n+m}, x_{n+m}) \circ T\varphi(-m, \Theta_{-n}(\omega, y)) \\
&\quad - P(x_{n+m+1}, y_{n+m+1}) \circ T\varphi(-1, \Theta_{-(m+n)}(\omega, x)) \circ P(y_{n+m}, x_{n+m}) \circ P(x_{n+m}, y_{n+m}) \\
&\quad \circ T\varphi(-m, \Theta_{-n}(\omega, x)) \circ P(y_n, x_n)\| \\
&\leq \|T\varphi(-1, \Theta_{-(m+n)}(\omega, y)) - P(x_{n+m+1}, y_{n+m+1}) \circ T\varphi(-1, \Theta_{-(m+n)}(\omega, x)) \\
&\quad \circ P(y_{n+m}, x_{n+m})\| \|T\varphi(-m, \Theta_{-n}(\omega, y))\| \\
&\quad + \|P(x_{n+m+1}, y_{n+m+1}) \circ T\varphi(-1, \Theta_{-(m+n)}(\omega, x)) \circ P(y_{n+m}, x_{n+m})\| \\
&\quad \cdot \|T\varphi(-m, \Theta_{-n}(\omega, y)) - P(x_{n+m}, y_{n+m}) \circ T\varphi(-m, \Theta_{-n}(\omega, x)) \circ P(y_n, x_n)\| \\
&= \text{dist}(T\varphi(-1, \Theta_{-(m+n)}(\omega, y)), T\varphi(-1, \Theta_{-(m+n)}(\omega, x))) \|T\varphi(-m, \Theta_{-n}(\omega, y))\| \\
&\quad + \|T\varphi(-1, \Theta_{-(m+n)}(\omega, x))\| \text{dist}(T\varphi(-m, \Theta_{-n}(\omega, y)), T\varphi(-m, \Theta_{-n}(\omega, x))) \\
&\leq B_2 d(\varphi(-(m+n), \omega, y), \varphi(-(m+n), \omega, x)) B_1^m \\
&\quad + B_1 \exp(am) d(x_n, y_n)
\end{aligned}$$

Wegen $d(\varphi(-(m+n), \omega, y), \varphi(-(m+n), \omega, x)) \leq B_1^m d(x_n, y_n)$ (siehe Beweis von Lemma 2.1.3) ergibt sich hieraus:

$$\begin{aligned}
&\text{dist}(T\varphi(-(m+1), \Theta_{-n}(\omega, y)), T\varphi(-(m+1), \Theta_{-n}(\omega, x))) \\
&\leq (B_2 B_1^{2m} + B_1 \exp(am)) d(x_n, y_n) \\
&\leq \left(\frac{1}{2} \exp a \exp(am) + \frac{1}{2} \exp a \exp(am)\right) d(x_n, y_n) \\
&\leq \exp(a(m+1)) d(x_n, y_n)
\end{aligned}$$

Damit ist (*) gezeigt.

Völlig analog kann man zeigen:

Es existiert eine Funktion $\bar{N}(x_n, y_n)$ und eine Zahl $\bar{b} > 0$ mit

$$\text{dist}(V_{\mu_1}^s(\Theta_{-n}(\omega, y)), P(x_n, y_n) V_{\mu_1}^s(\Theta_{-n}(\omega, x))) \leq \bar{N}(x_n, y_n) d(x_n, y_n)^{\bar{b}}$$

und

$$\overline{N}(x_{n+m}, y_{n+m}) \leq \overline{N}(x_n, y_n) \exp(2\varepsilon m)$$

Dann folgt die Behauptung mit

$$N(x_n, y_n) := \max(\tilde{N}(x_n, y_n), \overline{N}(x_n, y_n)) \quad b := \min(\tilde{b}, \overline{b})$$

□

Appendix: Die Theoreme B,C,E und F

Das grundlegende Theorem B wurde in der vorliegenden Fassung von Irwin [12] bewiesen (siehe hierzu auch Fathi, Herman und Yoccoz [9, Appendix A]). Mit dem von Irwin gewählten Ansatz ist es jedoch nicht möglich, Theorem C in vollständiger Form zu zeigen. Irwin kann mit seinem Vorgehen die Differenzierbarkeit der invarianten Mannigfaltigkeiten nur für $\kappa \leq 1$ beweisen, und dies reicht für unsere Zwecke ja nicht aus. Diese Schwierigkeiten sind jedoch nicht prinzipieller Natur, sondern resultieren einzig und allein aus der von Irwin benutzten Methode. Einen vollständigen Beweis von Theorem C (also der Differenzierbarkeit für beliebiges κ) unter Benutzung geometrischer Methoden findet sich zum Beispiel bei Dahlke [8, Kap. II].

Das Theorem E ist im wesentlichen ein Korollar zu Theorem B. Wir wollen den Beweis kurz skizzieren.

Aus Theorem B folgt sofort: Die Menge

$$W^{s,\kappa} := \{x \in E \mid \sup_{n \geq 0} \|\kappa^{-n} f^n(x)\| < \infty\}$$

ist Graph einer Lipschitz-Abbildung $g : E_1 \oplus E_2 \rightarrow E_3$.

Die Idee besteht im Weiteren darin, die Dynamik auf der stabilen Mannigfaltigkeit $W^{s,\kappa}$ zu studieren. Dies geschieht zweckmäßigerweise "in lokalen Koordinaten", indem die Abbildung g als "Karte" benutzt wird. Wir wollen dann für unser neues System nochmals Theorem B anwenden, diesmal jedoch bezüglich f^{-1} . Zunächst definieren wir die Abbildung

$$\begin{aligned} F : E_1 \oplus E_2 &\rightarrow E_1 \oplus E_2 \\ x &\mapsto \pi_{12} \circ f^{-1} \circ (Id, g)(x) \end{aligned}$$

wobei π_{12} die Projektion auf $E_1 \oplus E_2$ bezeichnet.

Nun gilt:

$$\begin{aligned} &\|(F - (T_1^{-1} \oplus T_2^{-1}))(x) - (F - (T_1^{-1} \oplus T_2^{-1}))(y)\| \\ &= \|\pi_{12} \circ f^{-1}(x, g(x)) - \pi_{12} \circ (T_1^{-1} \oplus T_2^{-1} \oplus T_3^{-1})(x, g(x)) - \pi_{12} \circ f^{-1}(y, g(y)) \\ &\quad + \pi_{12} \circ (T_1^{-1} \oplus T_2^{-1} \oplus T_3^{-1})(y, g(y))\| \\ &\leq \|(f^{-1} - T^{-1})(x, g(x)) - (f^{-1} - T^{-1})(y, g(y))\| \end{aligned}$$

$$\leq \text{Lip}(f^{-1} - T^{-1}) \max(\|x - y\|, \|g(x) - g(y)\|)$$

$$\leq \text{Lip}(f^{-1} - T^{-1}) \|x - y\|$$

Da $\text{Lip}(f^{-1} - T^{-1})$ als hinreichend klein vorausgesetzt worden war, folgt hieraus, daß die Voraussetzungen von Theorem B für F erfüllt sind, das heißt:

$$W^{u,\lambda} := \{x \in E_1 \oplus E_2 \mid \|\lambda^{-n} F^n(x)\| < \infty\}$$

ist Graph einer Lipschitz-Abbildung $h : E_2 \rightarrow E_1$.

Wir definieren nun die Abbildung

$$\begin{aligned} G : E_2 &\rightarrow E_1 \oplus E_3 \\ x &\mapsto (h, g \circ (id, h))(x) \end{aligned}$$

Dies ist offensichtlich eine Lipschitz-Abbildung mit $\text{Lip } G < 1$. Das Theorem ist daher bewiesen, wenn wir zeigen können:

$$W^{\kappa,\lambda} = \text{graph } G$$

“ $\supset$ ” Sei $x \in \text{graph } G$. Nach Konstruktion gilt dann: $x \in \text{graph } g$.

Daher reicht es zu zeigen: $\sup_{n \geq 0} \|\lambda^{-n} f^{-n}(x)\| < \infty$.

Nun gilt aber:

$$\begin{aligned} \|\lambda^{-n} f^{-n}(x)\| &= \lambda^{-n} \|f^{-n}(x)\| \\ &= \lambda^{-n} \|\pi_{12} f^{-n}(x), \pi_3 f^{-n}(x)\| \\ &= \lambda^{-n} \|\pi_{12} f^{-n}(x), g(\pi_{12} f^{-n}(x))\| \end{aligned}$$

(da $x \in \text{graph } g$ und $\text{graph } g$ f^{-1} -invariant ist)

$$\begin{aligned} &\leq \lambda^{-n} \|\pi_{12} f^{-n}(x)\| \\ &= \lambda^{-n} \|\pi_{12} f^{-n}(y, g(y))\| \\ &= \lambda^{-n} \|F^n(y)\| \\ &< \infty \end{aligned}$$

“ $\subset$ ” Sei $x \in W^{\kappa,\lambda}$. Dann gilt jedenfalls: $x \in \text{graph } g$, das heißt also $x = (y, g(y))$. Damit folgt

$$\begin{aligned} \sup_{n \geq 0} \|\lambda^{-n} F^n(y)\| &= \sup_{n \geq 0} \|\lambda^{-n} \pi_{12} \circ f^{-n}(y, g(y))\| \\ &\leq \sup_{n \geq 0} \|\lambda^{-n} f^{-n}(y, g(y))\| \\ &\leq \sup_{n \geq 0} \|\lambda^{-n} f^{-n}(x)\| \\ &< \infty \end{aligned}$$

Die Differenzierbarkeit von G folgt sofort aus der Differenzierbarkeit der Abbildungen g und h .

Ein Beweis von Theorem F findet sich für den Fall $\kappa \leq 1$ bei Fathi, Herman und Yoccoz [9], Appendix A, Theorem A.6. Der Fall $\kappa > 1$ soll nun noch kurz diskutiert werden. Es ist hierbei zweckmäßig auf den Beweis von Theorem C zurückzugehen (siehe Beispiel [8]). Da dort mit der Graphentransformationsmethode gearbeitet wird, wird die Behauptung zunächst für die instabilen Mannigfaltigkeiten gezeigt. Hierzu benötigt man eine Abbildung

$$\begin{aligned} F \cdot E_1 \times L_1(F_1, E_2) &\rightarrow E_1 \times L_1(E_1, E_2) \\ (x, L) &\mapsto (\psi_f g(x), \Gamma_{Df(x, g(x))} L) \end{aligned}$$

wobei $\Gamma_S L$ mit $S \in L_1(F_1, E_2)$ die (lineare) Graphentransformation von L mit S bezeichnet. Sei weiter $\Gamma^\circ(E_1, E_1 \times L_1(E_1, E_2))$ der Raum der stetigen Schritte des Bündels $E_1 \times L_1, (E_1, E_2) \rightarrow E_1$ mit der Metrik

$$d(\sigma_1, \sigma_2) := \sup_{x \in E_1} \|\pi_2 \sigma_1(x) - \pi_2 \sigma_2(x)\|$$

wobei π_2 die Projektion auf den zweiten Faktor bezeichnet. Auf $\Gamma^\circ(E_1, E_1 \times L_1(E_1, E_2))$ kann sodann mittels F eine neue Graphentransformation durch

$$\Gamma_f \sigma = F \circ \sigma \circ h^{-1}$$

definiert werden, wobei der Einfachheit halber

$$h(x) := \psi_f g(x)$$

gesetzt wird. Man kann nun zeigen, daß Γ_F eine kontrahierende Abbildung ist, welche daher einen eindeutigen Fixpunkt σ besitzt, und sodann direkt nachrechnen, daß $\pi_2 \sigma(x)$ die Ableitung von g im Punkt x ist.

Wir sind daher fertig, wenn wir zeigen können:

(α) Die Menge

$$M := \{\sigma \in \Gamma^\circ(E_1, E_1 \times L_1(E_1, E_2)) \mid \|\pi_2 \sigma(x) - \pi_2 \sigma(y)\| \leq \|x - y\|^\alpha\}$$

ist eine abgeschlossene Untermenge von $\Gamma^\circ(E_1, E_1 \times L_1(E_1, E_2))$

(β) M ist invariant unter der Graphentransformation Γ_F

zu (α) :

Sei $\{\sigma_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Hölder-stetigen Schnitten mit $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \sigma$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\|\pi_2 \sigma(x) - \pi_2 \sigma(y)\| &= \|\pi_2 \sigma(x) - \pi_2 \sigma_n(x) + \pi_2 \sigma_n(x) - \pi_2 \sigma_n(y) \\
&\quad + \pi_2 \sigma_n(y) - \pi_2 \sigma(y)\| \\
&\leq \|\pi_2 \sigma(x) - \pi_2 \sigma_n(x)\| + \|\pi_2 \sigma_n(x) - \pi_2 \sigma_n(y)\| \\
&\quad + \|\pi_2 \sigma_n(y) - \pi_2 \sigma(y)\| \\
&\leq d(\sigma, \sigma_n) + \|x - y\|^d + d(\sigma, \sigma_n)
\end{aligned}$$

zu (β) :

Mit den Abkürzungen

$$L := Df(h^{-1}(x), g(h^{-1}(x))), \quad M := Df(h^{-1}(y), g(h^{-1}(y)))$$

ergibt sich: (siehe auch [8]):

$$\begin{aligned}
d(\Gamma_F \sigma(x), \Gamma_F \sigma(y)) &= \|\pi_2 \circ F \circ \sigma \circ h^{-1}(x) - \pi_2 \circ F \circ \sigma \circ h^{-1}(y)\| \\
&= \|\Gamma_{Df(h^{-1}(x), g(h^{-1}(x)))} \pi_2 \circ \sigma(h^{-1}(x)) - \Gamma_{Df(h^{-1}(y), g(h^{-1}(y)))} \pi_2 \circ \sigma(h^{-1}(y))\| \\
&= \|\Gamma_L \pi_2 \circ \sigma(h^{-1}(x)) - \Gamma_L \pi_2 \circ \sigma(h^{-1}(y)) + \Gamma_L \pi_2 \circ \sigma(h^{-1}(y)) - \Gamma_M \pi_2 \circ \sigma(h^{-1}(y))\| \\
&\leq \frac{(\|T_2\| + \ell)((\|T_1^{-1}\|^{-1} - \ell)^{-1} \ell + 1)}{(\|T_1^{-1}\|^{-1} - \ell)} \|\pi_2 \sigma(h^{-1}(x)) - \pi_2 \circ \sigma(h^{-1}(y))\| \\
&\quad + \|\Gamma_L \pi_2 \circ \sigma(h^{-1}(y)) - \Gamma_M \pi_2 \circ \sigma(h^{-1}(y))\| \\
&\leq \frac{(\|T_2\| + \ell)((\|T_1^{-1}\|^{-1} - \ell)^{-1} \ell + 1)}{(\|T_1^{-1}\|^{-1} - \ell)} \|h^{-1}(x) - h^{-1}(y)\|^\alpha \\
&\quad + (\|T_2\| + \ell)(\|T_1^{-1}\|^{-1} - \ell)^{-2} \|\Psi_L \pi_2 \circ \sigma(h^{-1}(y)) - \Psi_M \pi_2 \circ \sigma(h^{-1}(y))\| \\
&\quad + (\|T_1^{-1}\|^{-1} - \ell)^{-1} \|\Phi_L \pi_2 \circ \sigma(h^{-1}(y)) - \Phi_M \pi_2 \circ \sigma(h^{-1}(y))\| \\
&\leq \frac{(\|T_2\| + \ell)((\|T_1^{-1}\|^{-1} - \ell)^{-1} \ell + 1)}{(\|T_1^{-1}\|^{-1} - \ell)} (\|T_1^{-1}\|^{-1} - \ell)^{-\alpha} \|x - y\|^\alpha \\
&\quad + ((\|T_2\| + \ell)(\|T_1^{-1}\|^{-1} - \ell)^{-2} + (\|T_1^{-1}\|^{-1} - \ell)^{-1}) \|L - M\|
\end{aligned}$$

Nun gilt aber

$$\|L - M\| = \|Df(h^{-1}(x), g(h^{-1}(x))) - Df(h^{-1}(y), g(h^{-1}(y)))\|$$

$$\begin{aligned}
&\leq \varrho \| (h^{-1}(x), g(h^{-1}(x))) - (h^{-1}(y), g(h^{-1}(y))) \|^\alpha \\
&\leq \varrho \| h^{-1}(x) - h^{-1}(y) \|^\alpha \\
&\leq \varrho (\|T_1^{-1}\|^{-1} - \ell)^{-\alpha} \|x - y\|^\alpha
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich insgesamt

$$d(\Gamma_F \sigma(x), \Gamma_F \sigma(y)) \leq \|x - y\|^\alpha$$

für ϱ, α hinreichend klein.

Das Theorem ist bewiesen.

Literatur

- [1] Abraham, R., Robbin, J.: *Transversal mappings and flows*. W. A. Benjamin, Inc., New York – Amsterdam 1967.
- [2] Boxler, P.: *Stochastische Zentrumsmannigfaltigkeiten*. Dissertation, Institut für Dynamische Systeme, Universität Bremen 1988.
- [3] Brin, M., Kifer, Y.: Dynamics of Markov chains and stable manifolds for random diffeomorphisms. Preprint April 1986.
- [4] Carr, J.: *Applications of center manifold theory*. Springer-Verlag, Berlin – Heidelberg – New York 1981.
- [5] Carverhill, A.: Flows of stochastic dynamical systems: ergodic theory. *Stochastics* 14 (1985), 273-317.
- [6] Cohn, D. L.: *Measure theory*. Birkhäuser, Boston – Basel – Stuttgart, 1980.
- [7] Crauel, H.: *Random dynamical systems: positivity of Lyapunov exponents, and Markov systems*. Dissertation, Institut für Dynamische Systeme, Universität Bremen 1987.
- [8] Dahlke, S.: Invariant families of submanifolds for diffeomorphisms. Report Nr. 192, Institut für Dynamische Systeme, Universität Bremen 1988.
- [9] Fathi, A., Herman, M., Yoccoz, J. C.: Proof of Pesin's stable manifold theorem, in: J. Palis Jr. (ed.) *Geometric Dynamics*, Lecture Notes in Mathematics 1007, Springer-Verlag 1983, 177-215.
- [10] Gerretsen, J. C. H.: *Lectures on tensor calculus and differential geometry*. P. Noordhoff N. V., Groningen 1962.
- [11] Hirsch, M., Pugh, C.: Stable manifolds and hyperbolic sets, in *Global Analysis*, Proc. Symp. in Pure Math., vol XIV, American Math. Soc. 1970.
- [12] Irwin, M. C.: On the smoothness of the composition map. *Quart. J. of Math.* 23 (1972), 113-133.
- [13] Knobloch, H. W., Kappel, F.: *Gewöhnliche Differentialgleichungen*. B. G. Teubner, Stuttgart 1974.
- [14] Marsden, J. E., McCracken, M.: *The Hopf bifurcation and its applications*. Springer-Verlag, Berlin – Heidelberg – New York 1976.
- [15] Oseledec, V. I.: A multiplicative ergodic theorem. Lyapunov characteristic numbers for dynamical systems. *Trans. Moscow Math. Soc.* 19 (1968), 197-231.

- [16] Pesin,Ja.B.: Families of invariant manifolds corresponding to nonzero characteristic exponents. Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Math. 40 (1976), 1332-1379.
- [17] Pesin,Ja.B.: Description of the π -partition of a diffeomorphism with invariant measure. Math. Zametki 21 (1977), 29-44.
- [18] Pesin,Ja.B.: Characteristic Lyapunov exponents and smooth ergodic theory. Uspekhi Mat. Nauk 32 (1977), 55-114. Englische Übersetzung: Russian Math. Surveys 32 (1977), 55-112.
- [19] Ruelle,D.: Ergodic theory of differentiable dynamical systems. Publ. Math. I.H.E.S. 50 (1979), 27-58.
- [20] Sacker,R.J., Sell,G.R.: A spectral theory for linear differential systems. J. Differ. Equations 27 (1978), 320-358.

FOTODRUCK J. MAINZ GmbH
Neupforte 13, Nähe Markt, D-5100 Aachen
Telefon: (0241) 27305 und (0241) 38606